

Rekurrenz-Eigenschaften von Funktionalen Markovscher Ketten

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Christoph Bandelow
aus Magdeburg

Bochum 1968



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Rekurrenz-Eigenschaften von Funktionalen Markovscher Ketten

**Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum**

von

Christoph Bandelow
aus Magdeburg

Bochum 1968



Dissertation eingereicht am 11.11.1968
Tag der mündlichen Prüfung: 16.12.1968
Referent: Prof. Dr. Hans G. Kellerer
Korreferent: Prof. Dr. Friedrich Sommer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Kapitel I. Rekurrenzbegriffe	
§ 1. Definitionen und Beispiele	7
§ 2. Topologische Struktur	12
§ 3. Additive Struktur	13
§ 4. Reduktion auf festen Start- und Zielzustand	19
§ 5. Unabhängige a_n	23
Kapitel II. Rekurrenzkriterien	
§ 6. Vorbereitungen	26
§ 7. Hauptsätze	27
§ 8. Bemerkungen und Beispiele	34
§ 9. Kombinatorische Anwendungen	39
Anhang: Einige Grundbegriffe der Theorie der Markovschen Ketten	50
Literaturverzeichnis	53

Einleitung

Im Jahre 1921 betrachtete POLYA [13] ein auf den Gitterpunkten des d -dimensionalen reellen Raumes $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) irrfahrendes Teilchen, das im Zeitpunkt 0 im Koordinatenursprung startet und sich in jeder folgenden Zeiteinheit mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2d}$ von dem bis dahin erreichten Punkt in einen der $2d$ um eine Längeneinheit entfernten Nachbargitterpunkte bewegt. Für die Wahrscheinlichkeit q_n dafür, daß das Teilchen irgendwann innerhalb der ersten n Zeitabschnitte zum Nullpunkt zurückkehrt, bewies POLYA

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \quad \left\{ \begin{array}{ll} = 1 & \text{für } d=1 \text{ oder } 2, \\ < 1 & \text{für } d \geq 3. \end{array} \right.$$

Dieses Ergebnis kann seit KOLMOGOROVs [12] maßtheoretischer Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie auch so formuliert werden: Ist $a_1, a_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter d -dimensionaler Zufallsvariablen zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit der Verteilung $P(a_1 = e_\delta) = P(a_1 = -e_\delta) = \frac{1}{2d}$ ($\delta = 1, \dots, d$; e_δ Einheitsvektoren), so gilt

$$P\left\{\omega \in \Omega: \sum_{v=1}^n a_v(\omega) = 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\right\} = \begin{cases} 1 & \text{für } d=1, 2, \\ 0 & \text{für } d \geq 3. \end{cases}$$

1951 verallgemeinerten CHUNG und FUCHS [2] dieses Resultat auf beliebige Folgen unabhängiger, identisch verteilter d -dimensionaler Zufallsvariablen (s. § 5). Einen besonders einfachen Beweis gaben CHUNG und ORNSTEIN 1962 [3].

Anschauliche Überlegungen führen zu der Vermutung, daß viele Ergebnisse hinsichtlich der Rekurrenz von Summen s_n unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen a_v richtig bleiben, wenn die Folge der a_n verallgemeinernd durch eine homogene Markovsche Kette ersetzt wird. So könnte z.B. das

irrfahrende Teilchen POLYAs über ein "Gedächtnis" für den letzten Schritt verfügen und die Wahrscheinlichkeitsverteilung des nächsten Schrittes von der dort gespeicherten Information abhängen. Spezialfälle dieser Art betrachtete GILLIS [9], [10].

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, das Problem in voller Allgemeinheit zu behandeln.

$a_0, a_1, a_2, \dots$ sei eine homogene Markovsche Kette zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dem minimalen Zustandsraum I , den Startwahrscheinlichkeiten $p(i) := P(a_0=i) \ (i \in I)$ und der Übergangsmatrix $P = (P(i,j))_{i,j \in I}$. $f = (f_1, \dots, f_d)$ sei ein d -dimensionales Funktional der Markovschen Kette ($d \in \mathbb{N}$), d.h. eine Abbildung von I in den $\mathbb{R}^d$. Wir interessieren uns für Rekurrenz-Eigenschaften der Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{v=1}^n f(a_v) \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Ein wesentlicher Punkt ist die Wahl der Definition des zu untersuchenden Rekurrenzbegriffes. Die im Vergleich zu Folgen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen große Vielgestaltigkeit der Erscheinungen bei Markov-Ketten läßt es zweckmäßig erscheinen, gleich eine ganze Liste von Rekurrenz-begriffen an den Anfang zu setzen. Ihre grundlegenden Eigenschaften und Zusammenhänge werden im 1. Kapitel abgeleitet.

Als Hauptsatz des 2. Kapitels (Rekurrenz Kriterien) ist Satz 10 anzusehen. Er beantwortet die Rekurrenzfrage u.a. für alle irreduziblen Markov-Ketten mit endlichem Zustandsraum vollständig. Besondere Vereinfachungen ergeben sich im Falle der Irrfahrten.

Mit Satz 13 kann entschieden werden, ob eine gegebene

rekurrente Irrfahrt ein gegebenes System endlicher Teilmen-
gen des Zustandsraumes "gleichmäßig berücksichtigt" in dem
Sinn, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Zeit-
punkte existieren, zu denen die Irrfahrt alle Mengen des
Systems gleich oft besucht hat.

Irrfahrten spielen in unserer Problemstellung eine doppel-
te Rolle: Einerseits ist $s_0, s_1, \dots$ eine Irrfahrt, wenn die a_n
unabhängig sind, andererseits ist jede Irrfahrt selbst eine
Markovsche Kette und kann damit an die Stelle der a_n treten.

Herrn Professor Dr. Hans G. Kellerer danke ich für viele
anregende Diskussionen.

Kapitel I. Rekurrenzbegriffe

§ 1. Definitionen und Beispiele.

Die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die die n Aussagen $\Gamma_1(\omega), \dots, \Gamma_n(\omega)$ richtig sind, bezeichnen wir im folgenden der Kürze wegen mit $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist:

$$\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\} := \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{\omega \in \Omega : \Gamma_i(\omega)\}$$

und

$$P(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) := P(\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}), \text{ falls } \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\} \in \mathcal{F}.$$

$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Ferner sei $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei $|x| := \max_j |x_j|$.

Def. 1. Es sei $x \in \mathbb{R}^d$.

a) x heißt möglich, wenn

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon\}\right) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng möglich, wenn

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon\}\right) = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt rekurrent, wenn

$$P\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon\}\right) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng rekurrent, wenn

$$P\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon\}\right) = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

b) $M := \{x : x \text{ möglich}\}, \quad M^* := \{x : x \text{ streng möglich}\},$
 $R := \{x : x \text{ rekurrent}\}, \quad R^* := \{x : x \text{ streng rekurrent}\}.$

Rekurrenz bzw. strenge Rekurrenz eines $x \in \mathbb{R}^d$ bedeutet hier-
nach, daß die Folge der s_n jede Umgebung von x mit positiver
Wahrscheinlichkeit bzw. mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft
passiert.

Def. 2. Es seien $x \in \mathbb{R}^d$ und $j \in I$.

a) x heißt $(\cdot, j)$ -möglich, wenn

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng $(\cdot, j)$ -möglich, wenn

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt $(\cdot, j)$ -rekurrent, wenn

$$P\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng $(\cdot, j)$ -rekurrent, wenn

$$P\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

b) $M_j := \{x: x (\cdot, j)\text{-möglich}\},$

$M_j^* := \{x: x \text{ streng } (\cdot, j)\text{-möglich}\},$

$R_j := \{x: x (\cdot, j)\text{-rekurrent}\},$

$R_j^* := \{x: x \text{ streng } (\cdot, j)\text{-rekurrent}\}.$

Im Unterschied zu den in Definition 1 eingeführten Begriffen
haben wir hier einen Zustand j als "Zielzustand" fixiert und
nur die Zeitpunkte n berücksichtigt, bei denen die Markov-Kette
($a_n; n \in \mathbb{Z}_+$) im Zustand j ist.

$\mathcal{F}(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ sei der von $a_0, a_1, \dots$ erzeugte σ -Ring, d.h. der
kleinste σ -Ring über Ω , bezüglich dessen die Zufallsvariablen
 $a_0, a_1, \dots$ meßbar sind. Bekanntlich existiert zu jedem $i \in I$ ge-
nau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_i auf $\mathcal{F}(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ mit

$$\begin{aligned} P_i(\{\omega \in \Omega: (a_0(\omega), \dots, a_r(\omega)) \in A\}) \\ = P(\{\omega \in \Omega: (a_t(\omega), \dots, a_{t+r}(\omega)) \in A\} \mid a_t = i) \end{aligned}$$

für alle $r \in \mathbb{Z}_+$, $A \in I^{r+1}$ und $t \in \mathbb{Z}_+$ mit $P(a_t=i) > 0$.

Zwischen den Maßen P_i ($i \in I$) und P besteht der Zusammenhang

$$P(B) = \sum_{i \in I} p(i) P_i(B) \quad \text{für } B \in \mathcal{F}(a_n; n \in \mathbb{Z}_+). \quad (1.1)$$

Insbesondere stimmt das Maß P_i mit P auf $\mathcal{F}(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ überein, wenn die Markov-Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand i startet ($p(i)=1$). Übergang vom Maß P zum Maß P_i kann daher anschaulich als Übergang von der gegebenen Markovschen Kette zu einer Kette mit gleicher Übergangsmatrix aber einer auf den Zustand i konzentrierten Startverteilung gedeutet werden.

Def. 3. Es seien $x \in \mathbb{R}^d$ und $i \in I$.

a) x heißt $(i, \cdot)$ -möglich, wenn

$$P_i\left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \varepsilon \}\right) > 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng $(i, \cdot)$ -möglich, wenn

$$P_i\left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \varepsilon \}\right) = 1 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt $(i, \cdot)$ -rekurrent, wenn

$$P_i\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - x| < \varepsilon \}\right) > 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng $(i, \cdot)$ -rekurrent, wenn

$$P_i\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - x| < \varepsilon \}\right) = 1 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

- b) $i^M := \{x: x \text{ (i, \cdot)-möglich}\},$
 $i^{M*} := \{x: x \text{ streng (i, \cdot)-möglich}\},$
 $i^R := \{x: x \text{ (i, \cdot)-rekurrent}\},$
 $i^{R*} := \{x: x \text{ streng (i, \cdot)-rekurrent}\}.$

Def. 4. Es seien $x \in \mathbb{R}^d$ und $i, j \in I$.

a) x heißt (i, j) -möglich, wenn

$$P_i\left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \varepsilon, a_n = j \}\right) > 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng (i,j) -möglich, wenn

$$P_i\left(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt (i,j) -rekurrent, wenn

$$P_i\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

x heißt streng (i,j) -rekurrent, wenn

$$P_i\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = j\}\right) = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0.$$

- b) ${}_iM_j := \{x: x \text{ } (i,j)\text{-möglich}\},$
 ${}_iM_j^* := \{x: x \text{ streng } (i,j)\text{-möglich}\},$
 ${}_iR_j := \{x: x \text{ } (i,j)\text{-rekurrent}\},$
 ${}_iR_j^* := \{x: x \text{ streng } (i,j)\text{-rekurrent}\}.$

Bemerkung 1. Die in der Einleitung umrissene Problemstellung kann jetzt präzisiert werden: Wir interessieren uns für die in den Definitionen 1-4 eingeführten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, insbesondere für die Rekurrenzmengen $R, R^*, R_j, R_j^*, {}_iR, {}_iR^*, {}_iR_j, {}_iR_j^*$. Offenbar sind alle diese Mengen bereits durch den Vektor $p = (p(i))_{i \in I}$ der Startwahrscheinlichkeiten, die Übergangsmatrix P und das Funktional f bestimmt. Wir sprechen daher im folgenden gelegentlich von einem "Problem (p, P, f) ", bzw. bei Fragen, bei denen die Startverteilung unwesentlich ist, von einem "Problem $(\cdot, P, f)$ ". Die Mengen ${}_iM, {}_iM^*, \dots, {}_iR_j^*$ mit festem Startzustand i sind unabhängig von der Startverteilung p . In § 4 stellen wir fest, daß es prinzipiell genügt, sich allein mit diesen Mengen zu beschäftigen.

Bemerkung 2. Unmittelbar aus den Definitionen folgt

$$M \supset M^* \supset R^*, \quad M_j \supset M_j^* \supset R_j^*$$

und

$$M \supset M_j, \quad M^* \supset M_j^*, \quad R \supset R_j, \quad R^* \supset R_j^*.$$

Da hierbei nicht ausgeschlossen ist, daß die Startverteilung

der Markov-Kette auf einen einzigen Zustand i konzentriert ist ($p(i)=1$), bleiben alle Inklusionen richtig, wenn auf beiden Seiten ein linker Index i hinzugefügt wird. M^* und R sind nicht allgemein vergleichbar (vgl. nachfolgende Beispiele 1 und 2).

Bsp. 1. Es sei $I = \{0, 1, -1\}$, $p(i) = \frac{1}{3}$ ($i \in I$),

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

und $f(i) = i$ ($i \in I$). P ist irreduzibel und aperiodisch. Wegen des fast deterministischen Charakters der Kette können hier alle interessierenden Mengen angegeben werden; z.B.

$$\begin{aligned} {}^0M &= {}_{-1}M = \{0, 1\}, & {}_1M &= \{0, -1\}, & M &= \{0, 1, -1\}, \\ {}^0M^* &= {}_{-1}M^* = \{0, 1\}, & {}_1M^* &= \{0, -1\}, & M^* &= \{0\}, \\ {}^0R &= {}_{-1}R = \{0, 1\}, & {}_1R &= \{0, -1\}, & R &= \{0, 1, -1\}, \\ {}^0R^* &= {}_{-1}R^* = \{0, 1\}, & {}_1R^* &= \{0, -1\}, & R^* &= \{0\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0M_0 &= {}_{-1}M_0 = \{0\}, & {}_1M_0 &= \{-1\}, & M_0 &= \{0, -1\}, \\ {}^0M_0^* &= {}_{-1}M_0^* = \{0\}, & {}_1M_0^* &= \{-1\}, & M_0^* &= \emptyset, \\ {}^0R_0 &= {}_{-1}R_0 = \{0\}, & {}_1R_0 &= \{-1\}, & R_0 &= \{0, -1\}, \\ {}^0R_0^* &= {}_{-1}R_0^* = \{0\}, & {}_1R_0^* &= \{-1\}, & R_0^* &= R_1^* = R_{-1}^* = \emptyset. \end{aligned}$$

Bsp. 2. $a_0, a_1, a_2, \dots$ sei die symmetrische BERNOULLI-Irrfahrt, d.h. $I = \mathbb{Z}$, $p(0) = P(a_0=0) = 1$ und $P(i, i+1) = P(i, i-1) = \frac{1}{2}$ ($i \in I$). Ferner sei $f(i) = 2^{-|i|}$ ($i \in I$).

P ist irreduzibel und rekurrent, und die Startverteilung ist determiniert.

Aus der Rekurrenz von P und der Positivität von f folgt $P(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty) = 1$, so daß $R = \emptyset$. Weiter erkennt man leicht $M^* = \{\frac{1}{2}\}$.

Hinsichtlich M und der M_j ($j \in I$) sei lediglich der Punkt

$x = 1$ untersucht:

Aus

$P(|s_n - 1| \leq 2^{-n}) > P(a_v = v \text{ für } v=1, \dots, n) = 2^{-n} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$
folgt $1 \in M$. Ist andererseits $a_n = j$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $j \in I$, so ist, abgesehen von einer P -Nullmenge, entweder $n=|j|$ und damit $|a_v| = v$ für $v=1, \dots, n$, also $s_n = \sum_{v=1}^{|j|} 2^{-v} = 1 - 2^{-|j|}$, oder $n > |j|$ und damit $s_n \geq \sum_{v=1}^{|j|} 2^{-v} + 2^{-|j|} + 2^{-|j|-1} = 1 + 2^{-|j|-1}$. Es gilt daher

$$P(|s_n - 1| < 2^{-|j|-1}, a_n = j) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und folglich $1 \notin M_j$. Damit ist

$$M = \bigcup_{j \in I} M_j.$$

§ 2. Topologische Struktur.

Für bequemen Formulierung späterer Sätze vereinbaren wir

Def. 5. $L := \{x \in \mathbb{R}^d: P(s_n = x) > 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$.

Das Problem (p.F.f) heißt diskret, wenn $M = L$ gilt.

Das Problem (p.F.f) heißt streng diskret, wenn L eine diskrete Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist (d.h. aus isolierten Punkten besteht).

Offenbar ist jedes streng diskrete Problem diskret. Ein einfaches Beispiel für ein diskretes, aber nicht streng diskretes Problem ist $I = \mathbb{Z}_+$, $p(0) = 1$, $P(i, i+1) = 1$ ($i \in \mathbb{Z}_+$), $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(i) = -2^{-i+2}$ ($i \geq 3$). Hier ist $M = L = \{2^{-i}: i \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{0\}$.

Satz 1. Alle unter Def. 1 bis Def. 4 definierten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ sind abgeschlossen (bezüglich der euklidischen Topologie des $\mathbb{R}^d$).

Beweis. a) Es seien $x \in \mathbb{R}^d$, $x_r \in M$ ($r \in \mathbb{N}$), $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = x$ und

$\varepsilon > 0$. Dann existieren ein $r_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_{r_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(|s_n - x_{r_0}| < \frac{\varepsilon}{2}) > 0$. Hieraus folgt

$$\mathbb{P}(|s_n - x| < \varepsilon) \geq \mathbb{P}(|s_n - x_{r_0}| < \frac{\varepsilon}{2}) > 0,$$

also $\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon\}) > 0$. Die Gültigkeit dieser Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ bedeutet $x \in M$.

b) Es seien $x \in \mathbb{R}^d$, $x_r \in M^*$ ($r \in \mathbb{N}$), $\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = x$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $r_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_{r_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon\}) \geq \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x_{r_0}| < \frac{\varepsilon}{2}\}) = 1,$$

also $\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon\}) = 1$.

c) Für die übrigen 14 Mengentypen der Definitionen 1-4 ist der Beweis analog.

Korollar.

$$M = \bar{L}.$$

($\bar{X}$ bezeichnet die abgeschlossene Hülle einer Menge $X \subset \mathbb{R}^d$.)

Beweis. Aus $M > L$ und Satz 1 folgt sofort $M > \bar{L}$. Weiter ist zu jedem $x \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in L$ mit $|x - y| < \varepsilon$ zu finden: Da L abzählbar ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &< \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n - x| < \varepsilon\}) \\ &= \mathbb{P}(\bigcup_{\substack{y \in L \\ |x - y| < \varepsilon}} \bigcup_{n \geq 1} \{s_n = y\}), \end{aligned}$$

also $\mathbb{P}(s_n = y) > 0$ für ein $y \in L$ mit $|x - y| < \varepsilon$. Damit ist $M \subset \bar{L}$ bewiesen.

Bemerkung 3. Das Problem (p, P, f) ist genau dann diskret, wenn L abgeschlossen ist.

§ 3. Additive Struktur.

Für $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ sei $X + Y := \{x + y: x \in X, y \in Y\}$ und $-X := \{-x: x \in X\}$.

Unmittelbar aus den Definitionen der betreffenden Mengen und der Markov-Eigenschaft folgt

Satz 2. Für beliebige $j, k \in I$ gilt

- a) $M_j + jM_k \subset M_k, \quad M_j^* + jM_k^* \subset M_k^*,$
- b) $M_j + jM \subset M, \quad M_j^* + jM^* \subset M^*,$
- c) $M_j + jR_k \subset R_k, \quad M_j^* + jR_k^* \subset R_k^*,$
- d) $M_j + jR \subset R, \quad M_j^* + jR^* \subset R^*.$

Selbstverständlich gilt auch $iM_j + jM_k \subset iM_k, \quad iM_j^* + jM_k^* \subset iM_k^*$ etc. Wie sich aus den Ausführungen vor Def. 3 ergibt, können diese Beziehungen als Spezialfälle der unter Satz 2 formulierten Inklusionen aufgefaßt werden.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 4 formulieren wir nun einen einfachen Satz über sogenannte Stoppzeiten. Eine Stoppzeit t zur Markovschen Kette $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ ist eine zufällige Größe zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und dem Wertebereich $\mathbb{Z}_+$ mit

$$\{\omega \in \Omega: t(\omega) = r\} \in \mathcal{F}(a_n; n \leq r) \text{ für alle } r \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.1)$$

wobei $\mathcal{F}(a_n; n \leq r)$ der von $a_0, \dots, a_r$ erzeugte σ -Ring ist.

(3.1) bedeutet, daß das Ereignis $\{t=r\}$ durch $a_0, \dots, a_r$ beschreibbar ist, daß also aus der Kenntnis von $a_0(\omega), \dots, a_r(\omega)$ allein bereits entschieden werden kann, ob $t(\omega) = r$ gilt.

Satz 3. $t_1, t_2, \dots$ sei eine Folge von Stoppzeiten zur Markovschen Kette $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$. Es existiere ein $s \in \mathbb{N}$ mit

$$t_{n+1}(\omega) \geq t_n(\omega) + s \quad (n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega)$$

und ein $i \in I$ mit

$$P(a_{t_n} = i) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Schließlich sei $\alpha_n(\omega) := (a_{n+1}(\omega), \dots, a_{n+s}(\omega)) \quad (n \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega)$. Dann ist $\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch

verteilter zufälliger Größen mit der Verteilung

$$\mathbb{P}(\alpha_{t_n} = (i_1, \dots, i_s)) = \prod_{\sigma=1}^s \mathbb{P}(i_{\sigma-1}, i_{\sigma}) \quad ((i_1, \dots, i_s) \in I^s, i_0 := i).$$

Dieser Satz folgt aus CHUNG [1], Theorem I.13.3. Auch ein direkter Beweis der Gleichung

$$\mathbb{P}(\alpha_{t_q} = (i_1^{(q)}, \dots, i_s^{(q)}) \text{ für } q=1, \dots, r) = \prod_{q=1}^r \prod_{\sigma=1}^s \mathbb{P}(i_{\sigma-1}^{(q)}, i_{\sigma}^{(q)})$$

$(i_{\sigma}^{(q)} \in I \text{ für } q=1, \dots, r \text{ und } \sigma=1, \dots, s; i_0^{(q)} := i)$ durch vollständige Induktion nach r bereitet keine Schwierigkeiten.

Satz 4. Für beliebige $j, k \in I$ gilt

- a) $R_j + {}_jM_k \subset R_k, \quad R_j^* + {}_jM_k \subset R_k^*,$
 b) $R_j + {}_jM \subset R, \quad R_j^* + {}_jM \subset R^*.$

Beweis. a) 1. Wir beweisen zunächst die zweite der 4 Inklusionen. Es seien $x \in R_j^*, y \in {}_jM_k$ und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $x \in R_j^*$ kann o.E.d.A. (Änderungen auf einer $\mathbb{P}$ -Nullmenge) angenommen werden, daß es zu jedem $\omega \in \Omega$ unendlich viele $n \in \mathbb{Z}_+$ gibt mit $|s_n(\omega) - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $a_n(\omega) = j$. Aus $y \in {}_jM_k$ folgt die Existenz eines $s \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{\sigma=1}^s f(a_{n+\sigma}) - y\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } a_{n+s} = k \mid a_n = j\right) > 0 \quad (3.2)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}_+$ mit $\mathbb{P}(a_n = j) > 0$. Somit können die Zufallsvariablen

$$t_1 := \min \{n \geq 0: |s_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } a_n = j\},$$

$$t_{r+1} := \min \{n \geq t_r + s: |s_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } a_n = j\} \quad (r \in \mathbb{N})$$

definiert werden. Die t_r sind Stoppzeiten, die die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllen. Es ist daher

$$\alpha_{t_r} = (a_{t_r+1}, \dots, a_{t_r+s}) \quad (r \in \mathbb{N})$$

eine Folge unabhängiger, identisch verteilter zufälliger Größen, und wegen (3.2) gilt

$$p_0 := \mathbb{P}\left(\left|\sum_{\sigma=1}^s f(a_{t_r+\sigma}) - y\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } a_{t_r+s} = k\right) > 0.$$

Nach dem Lemma von BOREL-CANTELLI existieren mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele natürliche Zahlen r mit

$$\left| \sum_{\sigma=1}^S f(a_{t_r+\sigma}) - y \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad a_{t_r+s} = k.$$

Für jedes solche r gilt

$$|s_{t_r+s} - (x+y)| \leq |s_{t_r} - x| + \left| \sum_{\sigma=1}^S f(a_{t_r+\sigma}) - y \right| < \epsilon.$$

Hieraus folgt

$$P(|s_n - (x+y)| < \epsilon \quad \text{und} \quad a_n = k \text{ für unendlich viele } n) = 1,$$

d.h. $x+y \in R_k^*$, w.z.b.w.

2. Es seien $x \in R_j$, $y \in {}_jM_k$ und ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $x \in R_j$ hat die Menge

$$\Omega' := \bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - x| < \frac{\epsilon}{2}, a_n = j \}$$

positive Wahrscheinlichkeit. Die Überlegungen unter 1. ergeben jetzt

$$P\left(\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - (x+y)| < \epsilon, a_n = k \} \mid \Omega'\right) = 1.$$

Hieraus folgt

$$P\left(\bigcap_{m \geq 0} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - (x+y)| < \epsilon, a_n = k \} \right) \geq P(\Omega') > 0,$$

also $x+y \in R_k$.

b) Beweisteil a) geht in einen Beweis der beiden unter b) behaupteten Inklusionen über, wenn an allen Stellen die Zusatzbedingung $a_n = k$ (bzw. $a_{t_r+s} = k$ oder ähnlich) weggelassen und demgemäß ${}_jM_k$ durch ${}_jM$ und R_k durch R ersetzt wird.

Satz 5. Es sei $j \in I$. Ist ${}_jM_k \not\subset -{}_kM_j^*$ für ein $k \in I$, so gilt ${}_iR_j = \emptyset$ für alle $i \in I$.

Beweis. 1. Es genügt zu zeigen, daß ein $\epsilon > 0$ mit

$$\alpha := P_j \left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n| < \epsilon, a_n = j \} \right) < 1 \quad (3.3)$$

existiert. Denn hieraus folgt für jedes $y \in \mathbb{R}^d$, jedes $i \in I$ und jedes $r \in \mathbb{N}$

$$P_i([|s_n - y| < \frac{\epsilon}{2}, a_n = j] \text{ für wenigstens } r \text{ Indizes } n) \leq \alpha^{r-1}.$$

Durch

$$B_r := \{[|s_n - y| < \frac{\epsilon}{2}, a_n = j] \text{ für wenigstens } r \text{ Indizes } n\} \quad (r \in \mathbb{N})$$

wird eine absteigende Ereignisfolge definiert, und man erhält

$$\begin{aligned} P_i \left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - y| < \frac{\epsilon}{2}, a_n = j \} \right) \\ = P_i \left(\bigcap_{r \geq 1} B_r \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} P_i(B_r) = 0, \end{aligned}$$

also $y \notin {}_i R_j$. - Es bleibt (3.3) zu beweisen.

2. Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in I$ und ein $x \in {}_j M_k$ mit $-x \notin {}_k M_j^*$. Aus $-x \notin {}_k M_j^*$ folgt die Existenz eines $\epsilon' > 0$ mit

$$P_k \left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n + x| < \epsilon', a_n = j \} \right) < 1. \quad (3.4)$$

(3.3) ist damit für den Fall $k=j$, $x=0$ bereits bewiesen, und wir können diesen Fall für das folgende ausschließen. Unter Verwendung der Markov-Eigenschaft und der Homogenität für die Folge der a_n folgt aus (3.4)

$$P_j \left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_{m+n}| < \frac{\epsilon'}{2}, a_{m+n} = j \} \mid |s_m - x| < \frac{\epsilon'}{2}, a_m = k \right) < 1 \quad (3.5)$$

für alle $m \in \mathbb{Z}_+$ mit $P_j(|s_m - x| < \frac{\epsilon'}{2}, a_m = k) > 0$.

3. Wir setzen

$$\epsilon'' := \begin{cases} \epsilon', & \text{falls } k \neq j, \\ \min(\epsilon', |x|), & \text{falls } k=j. \end{cases} \quad (3.6)$$

Da der Fall $k=j$, $x=0$ ausgeschlossen wurde, gilt $0 < \epsilon'' \leq \epsilon'$. Wegen $x \in {}_j M_k$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Zuständen $j = i_0, \dots, i_m = k$ mit $P(i_{\mu-1}, i_\mu) > 0$ für $\mu=1, \dots, m$ und

$$\left| \sum_{\mu=1}^m f(i_\mu) - x \right| < \frac{\epsilon''}{2}. \quad (3.7)$$

Hierbei kann angenommen werden (Wahl eines minimalen m), daß kein μ mit $0 < \mu < m$, $i_\mu = j$ und $\sum_{\nu=\mu}^m f(i_\nu) = 0$ existiert. Nach

(3.6) und (3.7) gilt $\sum_{\mu=1}^m f(i_\mu) \neq 0$, falls $k=j$.

Damit ist

$$\epsilon := \min(\{\frac{\epsilon'}{2}\} \cup \{|\sum_{v=1}^{\mu} f(i_v)| : 0 < \mu \leq m \text{ und } i_\mu = j\}) > 0$$

und

$$\mathbb{P}_j(|s_m - x| < \frac{\epsilon'}{2}, a_m = k, [|s_\mu| \geq \epsilon \text{ oder } a_\mu \neq j] \text{ für } 0 < \mu \leq m) > 0.$$

Aus (3.5) folgt

$$\mathbb{P}_j(\bigcap_{n \geq 1} \{|s_{m+n}| \geq \epsilon \text{ oder } a_{m+n} \neq j\} \mid |s_m - x| < \frac{\epsilon'}{2}, a_m = k) > 0.$$

Die beiden letzten Ungleichungen ergeben

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_j(\bigcap_{n \geq 1} \{|s_n| \geq \epsilon \text{ oder } a_n \neq j\}) \\ & \geq \mathbb{P}_j([|s_\mu| \geq \epsilon \text{ oder } a_\mu \neq j] \text{ für } 0 < \mu \leq m, |s_m - x| < \frac{\epsilon'}{2}, a_m = k) \\ & \cdot \mathbb{P}_j(\bigcap_{n \geq 1} \{|s_{m+n}| \geq \epsilon \text{ oder } a_{m+n} \neq j\} \mid |s_m - x| < \frac{\epsilon'}{2}, a_m = k) \\ & > 0, \end{aligned}$$

und das heißt

$$\mathbb{P}_j(\bigcup_{n \geq 1} \{|s_n| < \epsilon, a_n = j\}) < 1,$$

w.z.b.w.

Korollar. $0 \in {}_i R_i$, falls ${}_i R_i \neq \emptyset$.

$0 \in {}_i R_i^*$, falls ${}_i R_i^* \neq \emptyset$.

Beweis. Aus $x \in {}_i R_i^{(*)}$ ($= {}_i R_i$ oder ${}_i R_i^*$) folgt $x \in {}_i M_i$. Nach Satz 5 erhält man $-x \in {}_i M_i^* \subset {}_i M_i$. Mit Satz 4a ergibt sich $0 = x + (-x) \in {}_i R_i^{(*)}$.

Bemerkung 4. Die Folge der zufälligen Größen

$$\tilde{a}_n(\omega) := (s_n(\omega), a_n(\omega)) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

ist offenbar eine homogene Markovsche Kette mit dem (eventuell nicht minimalen) Zustandsraum

$$\tilde{I} := (L \cup \{0\}) \times I,$$

den Anfangswahrscheinlichkeiten

$$\tilde{P}((x,i)) = P(\tilde{a}_0 = (x,i)) = \begin{cases} p(i) & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

und den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\tilde{P}((x,i), (y,j)) = \begin{cases} P(i,j), & \text{falls } y = x + f(j), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$((x,i), (y,j)) \in \tilde{I}$. $\tilde{I}$ ist abzählbar, da L und I abzählbar sind.

Im Spezialfall eines streng diskreten Problems (p, P, f) erhält man die Sätze 4 und 5 durch Anwendung bekannter Aussagen über Markov-Ketten auf die spezielle Kette $(\tilde{a}_n; n \in \mathbb{Z}_+)$: Satz 4 folgt aus der Klasseninvarianz der Rekurrenz-Eigenschaft, bezüglich Satz 5 (und Satz 4) vergleiche man mit CHUNG [1], Corollary 1 zu Theorem I.4.5. '.

§ 4. Reduktion auf festen Start- und Zielzustand.

$$\begin{aligned} \text{Satz 6. } M &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^M, & M^* &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^{M^*}, \\ R &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^R, & R^* &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^{R^*}, \\ M_j &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^{M_j}, & M_j^* &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^{M_j^*}, \\ R_j &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^{R_j}, & R_j^* &= \bigcup_{i:p(i)>0} i^{R_j^*}. \end{aligned}$$

Beweis. Satz 6 ist eine unmittelbare Konsequenz der Definitionen 1 bis 4 und Gleichung (1.1).

Weniger leicht sind Aussagen zu erhalten, die in analoger Weise den rechten Index der Mengen aus den Definitionen 1 bis 4

betreffen, die also Zusammenhänge zwischen M und den M_j , zwischen R und den R_j usw. beschreiben. Wir fassen alle Ergebnisse dieser Art mit dem nächsten Satz zusammen.

Satz 7.

- a) $M = \bigcup_{j \in I} M_j$, falls $|I| < \infty$ oder (p, P, f) diskret.
 b) $R = \bigcup_{j \in I} R_j$, falls $|I| < \infty$.
 c) ${}_i R^* = \bigcup_{j \in I} {}_i R_j^*$ ($i \in I$), falls $|I| < \infty$ und P irreduzibel.

Beweis. Die Inklusion " $\supset$ " ist in allen Fällen trivial. Wir können uns daher auf den Beweis der Inklusion " $\subset$ " beschränken.

- a) 1. Es sei $|I| < \infty$ und $x \in M$. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &< P \left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \frac{1}{r} \} \right) \\ &= P \left(\bigcup_{j \in I} \bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \frac{1}{r}, a_n = j \} \right). \end{aligned}$$

Es existiert daher ein $j(r) \in I$ mit

$$P \left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \frac{1}{r}, a_n = j(r) \} \right) > 0.$$

Wegen $|I| < \infty$ gibt es ein $j \in I$, das in der Folge $j(1), j(2), j(3), \dots$ unendlich oft vorkommt. Für dieses j gilt

$$P \left(\bigcup_{n \geq 1} \{ |s_n - x| < \varepsilon, a_n = j \} \right) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon > 0,$$

d.h. $x \in M_j$.

2. Es sei (p, P, f) diskret und $x \in M$. Es folgt $x \in L$, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $P(s_n = x) > 0$. Damit gilt $P(s_n = x, a_n = j) > 0$ für ein geeignetes $j \in I$, und hieraus folgt $x \in M_j$.

- b) Es sei $|I| < \infty$ und $x \in R$. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$P(|s_n - x| < \frac{1}{r} \text{ für unendlich viele } n) > 0.$$

Wegen $|I| < \infty$ existiert ein $j(r) \in I$ mit

$\mathbb{P}(|s_n - x| < \frac{1}{r} \text{ und } a_n = j(r) \text{ für unendlich viele } n) > 0.$

Damit kann wie im Beweisteil a) 1. weitergeschlossen werden.

c) 1. Es sei $|I| < \infty$ und $x \in {}_i R^*$. Wir definieren

$$B_j := \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - x| < \frac{1}{k}, a_n = j \} \quad (j \in I)$$

und zeigen

$$\mathbb{P}_i \left(\bigcup_{j \in I} B_j \right) = 1. \quad (4.1)$$

Nach dem Limesatz für absteigende Mengenfolgen gilt in der Tat

$$\mathbb{P}_i \left(\bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - x| < \frac{1}{k} \} \right) = 1,$$

und für jedes

$$\omega \in \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{ |s_n - x| < \frac{1}{k} \}$$

findet man wie unter b) ein j mit $\omega \in B_j$.

2. Es sei $\mathbb{P}_i(B_j) > 0$ und $\mathbb{P}_i(B_k) > 0$. Wir zeigen, daß hieraus $0 \in {}_j M_k$ folgt. Die beiden Voraussetzungen implizieren $x \in {}_i R_j$ und $x \in {}_i R_k$, erst recht also

$$x \in {}_i M_j \text{ und } x \in {}_i M_k. \quad (4.2)$$

Da P irreduzibel ist, gibt es ein $y \in \mathbb{R}^d$ mit

$$y \in {}_j M_i. \quad (4.3)$$

Aus (4.2) und (4.3) folgt mit Satz 2a $x+y \in {}_j M_j$. Hieraus und aus ${}_i R_j \neq \emptyset$ folgt nach Satz 5

$$-x - y \in {}_j M_j^* \subset {}_j M_j. \quad (4.4)$$

Aus (4.2), (4.3) und (4.4) schließlich erhält man $0 \in {}_j M_k$ durch zwei weitere Anwendungen des Satzes 2a.

3. Aus $\mathbb{P}_i(B_j) > 0$ und $0 \in {}_j M_k$ folgt wie im Beweis zu Satz 4a $\mathbb{P}_i(B_k | B_j) = 1$. Nach 2. gilt daher

$$\mathbb{P}_i(\bar{B}_k \cap B_j) = 0, \text{ falls } \mathbb{P}_i(B_j) > 0 \text{ und } \mathbb{P}_i(B_k) > 0. \quad (4.5)$$

Aus (4.1) und (4.5) folgt $P_i(B_j) = 1$ für wenigstens ein $j \in I$ (nämlich für alle j mit $P_i(B_j) > 0$), und für dieses j gilt $x \in {}_iR_j^*$.

Bemerkung 5. Da der Fall einer determinierten Startverteilung p nicht ausgeschlossen ist, folgen aus Satz 7a) bzw. b) die spezielleren Aussagen

$${}_iM = \bigcup_{j \in I} {}_iM_j, \text{ falls } |I| < \infty \text{ oder } (\delta(i, \cdot), P, f) \text{ diskret,}$$

$${}_iR = \bigcup_{j \in I} {}_iR_j \quad (i \in I), \text{ falls } |I| < \infty,$$

wobei wie üblich $\delta(i, j): I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

definiert sei.

Beispiel 2 am Ende von § 1 demonstriert, daß die Voraussetzung von Satz 7a) wesentlich ist.

Satz 14 zeigt, daß selbst im streng diskreten Fall und bei irreduzibler, rekurrenter Übergangsmatrix sowie determinierter Startverteilung $R \neq \bigcup_{j \in I} R_j$ möglich ist.

Satz 14 zeigt auch, daß die Voraussetzung $|I| < \infty$ in Satz 7c) wesentlich ist. Die Berechtigung der Irreduzibilitätsvoraussetzung erweist das Beispiel

$$I = \{0, 1, -1\}, \quad p(0) = 1, \quad P(0, 1) = P(0, -1) = \frac{1}{2}, \\ P(1, 1) = P(-1, -1) = 1, \quad f(i) = 0 \quad (i \in I),$$

in dem ${}_0R^* = \{0\}$, ${}_0R_0^* = {}_0R_1^* = {}_0R_{-1}^* = \emptyset$. Daß die Behauptung von Satz 7c) nicht zu $R^* = \bigcup_{j \in I} R_j^*$ verallgemeinert werden kann, zeigt Beispiel 1 in § 1.

Schließlich ist im folgenden Beispiel $|I| < \infty$, die Startverteilung determiniert, die zugrunde liegende Markov-Kette eine

Folge unabhängiger Zufallsvariablen, (p, P, f) streng diskret und trotzdem $M^* \neq \bigcup_{j \in I} M_j^*$: Ist

$$I = \{+1, -1\}, p(1) = 1, P(i, j) = \frac{1}{2}, f(i) = 1,$$

so ist $M^* = N$ und $M_1^* = M_{-1}^* = \emptyset$.

§ 5. Unabhängige a_n .

Sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(i, j)$ ($i, j \in I$) unabhängig von i , so ist $(f(a_n); n \in \mathbb{N})$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter d -dimensionaler Zufallsvektoren, und die in den Definitionen 3 und 4 eingeführten Mengen sind unabhängig vom linken Index i , d.h. ${}_i M = M, {}_i M^* = M^*, \dots, {}_i R_j^* = R_j^*$ für alle $i, j \in I$. Die Rekurrenzfrage wird in diesem Fall durch folgende Sätze von CHUNG und FUCHS [2] größtenteils beantwortet:

- Es ist entweder $R^* = \emptyset$ oder $R^* = M$.
- Ist $d=1$ und existiert der Erwartungswert $Ef(a_1)$ von $f(a_1)$, so gilt genau dann $R^* = M$, wenn $Ef(a_1) = 0$.
- Ist $d=2$ und existiert das zweite Moment von $f(a_1)$, d.h. ist $E([f_1(a_1)]^2 + [f_2(a_1)]^2) < \infty$, so gilt ebenfalls genau dann $R^* = M$, wenn $Ef(a_1) = 0$.
- Ist $d \geq 3$ und $f(a_1)$ ein echt d -dimensionaler Zufallsvektor, so ist stets $R^* = \emptyset$. (Für $X \subset \mathbb{R}^d$ sei $\dim X$ die Dimension des kleinsten X enthaltenden linearen Teilraumes des $\mathbb{R}^d$. Unter der echten Dimension des diskreten Zufallsvektors $f(a_1)$ verstehen wir $\dim L_1$ mit $L_1 := \{x \in \mathbb{R}^d: P(f(a_1) = x) > 0\}$. Im betrachteten Fall der Unabhängigkeit gilt offenbar $\dim L_1 = \dim L = \dim M$. Existiert die Kovarianzmatrix von $f(a_1)$, so ist deren Regularität bekanntlich mit $\dim L_1 = d$ gleichbedeutend (RICHTER [14], S. 264).)

Wir beweisen ergänzend

Satz 8. Ist $P(i, j)$ unabhängig von i , so gilt

$$R = R^* = R_j = R_j^* \quad (j \in I).$$

Beweis. Nach Bemerkung 2 im Anschluß an die Definitionen 1 bis 4 gilt

$$R \supset \overset{R^*}{R_j} \supset R_j^*,$$

so daß es genügt,

$$(a) \quad R \subset R^*, \quad (b) \quad R^* \subset R_j^*$$

zu beweisen.

a) Ist $x \in R$ und $\varepsilon > 0$, so hat

$$B := \{\omega \in \Omega: |s_n(\omega) - x| < \varepsilon \text{ für unendlich viele } n\}$$

positive Wahrscheinlichkeit. B ist ein in bezug auf die Folge $(f(a_n); n \in \mathbb{N})$ symmetrisches Ereignis: Ist $\omega_1 \in B$, $\omega_2 \in \Omega$ und die Folge $(f(a_n(\omega_2)); n \in \mathbb{N})$ eine endliche Permutation der Folge $(f(a_n(\omega_1)); n \in \mathbb{N})$, so gilt für alle $n > \max\{m: f(a_m(\omega_1)) \neq f(a_m(\omega_2))\}$ offenbar $s_n(\omega_1) = s_n(\omega_2)$ und damit $\omega_2 \in B$. Aus dem 0-1-Gesetz für symmetrische Ereignisse (vgl. FELLER [8], S. 122) folgt daher $P(B) = 1$. Das beweist $x \in R^*$.

b) Es sei $x \in R^*$ und $j \in I$.

1. Wir zeigen zunächst $x - f(j) \in R^*$. Einerseits ist

$$p' := P(s_1 = f(j)) \geq P(a_1 = j) > 0,$$

da der Zustandsraum I als minimal vorausgesetzt ist. Wäre nun $x - f(j) \notin R^*$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$p'' := P(|s_n - x + f(j)| < \varepsilon \text{ für höchstens endlich viele } n) > 0.$$

Man erhielte

$$\begin{aligned} & P(|s_n - x| < \varepsilon \text{ für höchstens endlich viele } n) \\ & \geq P(s_1 = f(j) \text{ und } |s_{n+1} - x| < \varepsilon \text{ für höchstens endlich viele } n) \\ & = P(s_1 = f(j) \text{ und } |\sum_{2 \leq v \leq n+1} f(a_v) - x + f(j)| < \varepsilon \\ & \hspace{15em} \text{für höchstens endlich viele } n) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(s_1 = f(j)) \cdot \mathbb{P}(|s_n - x + f(j)| < \varepsilon \text{ für höchstens endlich viele } n) \\ = p' \cdot p'' > 0$$

im Widerspruch zu $x \in R^*$.

2. Wegen $x - f(j) \in R^*$ kann o.E.d.A. angenommen werden, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\omega \in \Omega$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|s_n(\omega) - x + f(j)| < \varepsilon$ existieren. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ wird daher durch

$$t_1 := \min \{n \in \mathbb{N} : |s_n - x + f(j)| < \varepsilon\}, \\ t_{r+1} := \min \{n > t_r : |s_n - x + f(j)| < \varepsilon\} \quad (r \in \mathbb{N})$$

eine Folge $(t_r; r \in \mathbb{N})$ zufälliger Variablen definiert. Die t_r sind Stoppzeiten, und es folgt, daß $a_{t_1+1}, a_{t_2+1}, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter zufälliger Variablen ist mit $\mathbb{P}(a_{t_r+1} = k) = \mathbb{P}(a_1 = k) > 0$ für alle $k \in I$. $a_{t_1+1}, a_{t_2+1}, \dots$ ist damit auch eine irreduzible rekurrente Markovsche Kette, so daß insbesondere

$$\mathbb{P}(a_{t_r+1} = j \text{ für unendlich viele } r) = 1.$$

Da die Aussagen " $|s_{t_r}(\omega) - x + f(j)| < \varepsilon$ und $a_{t_r+1}(\omega) = j$ " und " $|s_{t_r+1}(\omega) - x| < \varepsilon$ und $a_{t_r+1}(\omega) = j$ " gleichwertig sind, bedeutet dies

$$\mathbb{P}(|s_n - x| < \varepsilon \text{ und } a_n = j \text{ für unendlich viele } n) = 1.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, so daß $x \in R_j^*$.

Kapitel II. Rekurrenzkriterien

§ 6. Vorbereitungen.

In diesem Kapitel setzen wir bis auf wenige entsprechend gekennzeichnete Ausnahmen voraus, daß der Zustandsraum I eine rekurrente Klasse ist. Am Ende von § 8 wird erläutert, daß diese Voraussetzung nicht allzu einschränkend ist.

Wir führen die Tabu-Wahrscheinlichkeiten

$$P_n^i(j,k) := P_j(a_n = k, a_v \neq i \text{ für } 0 < v < n) \quad (i, j, k \in I, n \in \mathbb{N})$$

ein. Bekanntlich gilt (CHUNG [1], Theorem I.9.3)

$$G^i(j,k) := \sum_{n \neq 1} P_n^i(j,k) < \infty \quad (i, j, k \in I)$$

$G^i(j,k)$ ist hiernach der Erwartungswert der Anzahl der Durchgänge durch den Zustand k bis zum ersten Erreichen des Zustandes i , falls im Zustand j gestartet wird, im Falle $j = k$ der Startaufenthalt nicht gezählt wird, jedoch im Falle $i = k$ das Eintreffen in i mitrechnet.

Addition der Gleichungen

$$\sum_{k \neq 1} P_n^i(j,k) P(k,1) = P_{n+1}^i(j,1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

zeigt, daß die Größen $G^i(j,k)$ bei festem i und j das Gleichungssystem

$$\sum_k u(k) P(k,1) = u(1) + P(i,1) - P(j,1) \quad (1 \in I)$$

lösen. Besondere Bedeutung haben daher die Größen $G^i(i,k)$, also die Erwartungswerte der Anzahl der Durchgänge durch k zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen durch i . Sie bilden für jedes feste $i \in I$ ein P -invariantes Maß auf I , d.h. sie sind eine nicht-negative und nicht-triviale Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_k u(k) P(k,1) = u(1). \quad (6.1)$$

DERMAN [4] bewies, daß dieses P-invariante Maß bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmt ist, wobei

$$\sum_{k \in I} u(k) \left\{ \begin{array}{ll} < \infty, & \text{falls } P \text{ positiv-rekurrent,} \\ = \infty, & \text{falls } P \text{ null-rekurrent.} \end{array} \right.$$

Hieraus folgt, daß eine Ungleichung der Gestalt

$$\sum_j G^i(i, j) |f(j)|^\alpha < \infty \quad (\alpha \geq 0) \text{ für alle } i \in I \text{ gilt, sobald sie}$$

für ein $i \in I$ gilt. Dasselbe gilt für die Gleichung

$$\sum_j G^i(i, j) f(j) = 0 \text{ im Falle } \sum_j G^i(i, j) |f(j)| < \infty. \text{ Damit ist}$$

bereits Teil a) des folgenden Satzes bewiesen, der zur Vorbereitung von Satz 10 dient.

Satz 9.

a) Die Ungleichung

$$\sum_j G^i(i, j) |f(j)|^\alpha < \infty \quad (\alpha \geq 0)$$

und die Gleichung

$$\sum_j G^i(i, j) f(j) = 0 \quad (\text{falls } \sum_j G^i(i, j) |f(j)| < \infty)$$

sind klasseninvariant bezüglich $i \in I$.

b) $\dim {}_i M_i$ ist klasseninvariant bezüglich $i \in I$.

Beweis. Es ist nur noch Teil b) zu beweisen. Zu $i \in I$ und $j \in I$ existieren ein $z_1 \in {}_i M_j$ und ein $z_2 \in {}_j M_i$. Aus Satz 2a erhält man ${}_i M_i + z \subset {}_j M_j$ und ${}_j M_j + z \subset {}_i M_i$, wobei $z := z_1 + z_2$ und $X + z := \{x+z : x \in X\}$ für $X \subset \mathbb{R}^d$. Hieraus folgt die Behauptung.

§ 7. Hauptsätze.

Mit den beiden folgenden Sätzen werden die Ergebnisse aus § 5 auf den allgemeineren Fall einer Markovschen Kette ausgedehnt.

Satz 10. Es sei das Problem (p, P, f) gegeben und dabei I eine rekurrente Klasse.

a) Ist $d=1$ und für ein $i \in I$

$$\sum_j G^1(i, j) |f(j)| < \infty \quad (7.1)$$

oder $d=2$ und für ein $i \in I$

$$\left. \begin{aligned} \sum_j G^1(i, j) |f_\delta(j)| < \infty, \quad \sum_j G^1(i, j) f_\delta^2(j) < \infty, \\ \sum_j \sum_k G^1(i, j) G^1(j, k) |f_\delta(j) f_\delta(k)| < \infty \end{aligned} \right\} \quad (\delta=1, 2), \quad (7.2)$$

so folgen aus $\sum_j G^1(i, j) f(j) = 0$ die Gleichungen

$${}_i R_j^* = {}_i M_j \quad \text{und} \quad {}_i R^* = {}_i M \quad \text{für alle } i, j \in I.$$

b) Existiert ein $\delta \in \{1, \dots, d\}$ mit

$$\sum_j G^1(i, j) |f_\delta(j)| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_j G^1(i, j) f_\delta(j) \neq 0,$$

so ist ${}_i R = \emptyset$ für alle $i \in I$.

c) Ist $\dim {}_i M_i \geq 3$ für ein $i \in I$, so gilt ${}_i R_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$.

Beweis. O. Da I als rekurrente Klasse vorausgesetzt ist, kann o.E.d.A. (Änderung auf einer $\mathbb{P}$ -Nullmenge) angenommen werden, daß zu jedem $\omega \in \Omega$ und jedem $i \in I$ unendlich viele $n \in \mathbb{Z}_+$ mit $a_n(\omega) = i$ existieren. Für jedes $i \in I$ wird somit durch

$$t_{i,1}(\omega) := \min \{n \geq 0: a_n(\omega) = i\},$$

$$t_{i,r+1}(\omega) := \min \{n > t_{i,r}(\omega): a_n(\omega) = i\} \quad (r \in \mathbb{N})$$

induktiv eine Folge $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots$ zufälliger Variablen definiert. Weiter sei

$$S_{i,r}(\omega) := \sum_{t_{i,r}(\omega) < n \leq t_{i,r+1}(\omega)} f(a_n(\omega)) \quad (i \in I, r \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega)$$

und, mit der Bezeichnung $\text{pr}_\delta(x) = \xi_\delta$ für $x = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$S_{i,r,\delta}(\omega) := \text{pr}_\delta(S_{i,r}(\omega)) \quad (i \in I, r \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega, \delta \in \{1, \dots, d\}).$$

Die Folge $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$ ist für jedes feste $i \in I$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, d -dimensionaler Zufallsvariablen (vgl. DÖBLIN [5], der die durch das Auftreten der $S_{i,r}$ charakterisierte Technik als erster verwendete), und die Existenz des α -ten Momentes ($\alpha \geq 0$) eines $S_{i,r,\delta}$ ist eine Klasseninvariante: Existiert $E(|S_{i,r,\delta}|^\alpha)$ für ein $i \in I$, so für alle $i \in I$. Ferner gilt

$$E(S_{i,r}) = \sum_j G^1(i,j) f(j) \quad (7.3)$$

und

$$E(S_{i,r,\delta}^2) = \sum_j G^1(i,j) f_\delta^2(j) + 2 \sum_j G^1(i,j) f_\delta(j) \sum_{k \neq i} G^1(j,k) f_\delta(k), \quad (7.4)$$

falls alle auftretenden Reihen absolut konvergieren (CHUNG [1], Theorem I.14.4 bis I.14.7). Die Voraussetzungen (7.1) und (7.2) beinhalten offenbar genau die absolute Konvergenz der Reihe (7.3) im Falle $d=1$ und der Reihen (7.3) und (7.4) im Falle $d=2$. (Es gilt wegen der Rekurrenz $G^1(j,i) = 1$.)

1. Um Behauptung a) für ein spezielles $i \in I$ zu beweisen, kann o.E.d.A. angenommen werden, daß die Markovsche Kette in diesem Zustand i mit Sicherheit startet: $a_0(\omega) = i$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist $t_{i,1} \equiv 0$ und

$$s_{t_{i,r}} = \sum_{0 < q < r} S_{i,q} \quad (r \in \mathbb{N}). \quad (7.5)$$

Die Folge der unabhängigen, identisch verteilten, diskreten Zufallsgrößen $S_{i,1}, S_{i,2}, \dots$ ist eine Markovsche Kette, auf die die in § 5 zusammengestellten Ergebnisse von CHUNG und FUCHS angewendet werden können. Die Voraussetzungen hinsichtlich der Existenz von Momenten sind nach Beweisteil 0. erfüllt. Bezeichnen wir die dieser Kette mit dem Zustandsraum

$$\hat{I} := \{x \in \mathbb{R}^d: P(S_{i,1} = x) > 0\}$$

und dem Funktional

$$\hat{f}(x) := x \quad \text{für } x \in \hat{I}$$

nach den Definitionen 1 bis 4 zugeordneten Mengen mit $\hat{M}$, $\hat{M}^*$, ..., ${}_i\hat{R}_j^*$, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 10a wegen (7.3) insbesondere

$$\hat{R}^* = \hat{M}, \text{ falls } \sum_j G^i(i, j) f(j) = 0.$$

Andererseits folgt aus (7.5) sofort

$$\hat{M} = {}_iM_i \text{ und } \hat{R}^* = {}_iR_i^*, \quad (7.6)$$

so daß ${}_iR_i^* = {}_iM_i$. Speziell erhält man (Korollar zu Satz 5)

$$0 \in {}_iR_i^*.$$

Die Behauptungen ${}_iR_j^* = {}_iM_j$ und ${}_iR^* = {}_iM$ von Teil a) folgen hieraus mittels Satz 4.

2. Zum Beweis von Teil b) kann offensichtlich o.E.d.A. $d=1$ und sodann

$$\sum_j G^i(i, j) |f(j)| < \infty, E := \sum_j G^i(i, j) f(j) > 0$$

und wie unter 1.

$$a_0(\omega) = i \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

vorausgesetzt werden. Wegen (7.3) und (7.5) gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \cdot s_{t_{i,r+1}} = E,$$

also

$$P(s_{t_{i,r+1}} < \frac{2}{3} rE \text{ für unendlich viele } r) = 0. \quad (7.7)$$

Wir definieren für $r \in \mathbb{N}$

$$T_{i,r}(\omega) := \min \left\{ \sum_{t_{i,r}(\omega) < n \leq m} f(a_n(\omega)) : t_{i,r}(\omega) < m \leq t_{i,r+1}(\omega) \right\}.$$

$(T_{i,r}; r \in \mathbb{N})$ ist eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Wegen

$$|T_{i,r}(\omega)| \leq \sum_{t_{i,r}(\omega) < n \leq t_{i,r+1}(\omega)} |f(a_n(\omega))|$$

und

$$E\left(\sum_{t_{i,r} < n \leq t_{i,r+1}} |f(a_n)|\right) = \sum_j G^1(i,j) |f(j)| < \infty$$

(vgl. (7.3)) existiert der Erwartungswert von $T_{i,r}$.
Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\infty} P(T_{i,r} < -\frac{rE}{\gamma}) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} P(T_{i,1} < -\frac{rE}{\gamma}) \\ &\leq \int_0^{\infty} P(T_{i,1} < -\xi \cdot \frac{E}{\gamma}) d\xi \\ &= \int_0^{\infty} \left[\int_{\Omega} \chi_{\{T_{i,1} < -\xi \cdot \frac{E}{\gamma}\}}(\omega) dP \right] d\xi \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_0^{\infty} \chi_{\{T_{i,1} < -\xi \cdot \frac{E}{\gamma}\}}(\omega) d\xi \right] dP \quad (\text{Satz von Fubini}) \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{\gamma}{E} |T_{i,1}(\omega)| dP \\ &< \infty, \end{aligned}$$

wobei $\chi_B(\omega)$ wie üblich die Indikatorfunktion der Teilmenge B von Ω bezeichnet. Eine Anwendung des BOREL-CANTELLI-Lemmas ergibt

$$P(T_{i,r} < -\frac{rE}{\gamma} \text{ für unendlich viele } r) = 0. \quad (7.8)$$

Aus (7.7) und (7.8) folgt

$$P\left(\min_{t_{i,r} \leq n \leq t_{i,r+1}} s_n < \frac{rE}{\gamma} \text{ für unendlich viele } r\right) = 0,$$

also

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty) = 1,$$

also ${}_1R = \emptyset$, w.z.b.w.

3. Nach Satz 9b gilt $\dim {}_i M_i \geq 3$ für alle $i \in I$, sobald diese Ungleichung für ein $i \in I$ gilt. Eine Anwendung der Sätze von CHUNG und FUCHS auf die Folge (7.5) ergibt damit sofort ${}_i R_i = \emptyset$ für alle $i \in I$. Die Annahme ${}_i R_j \neq \emptyset$ impliziert wegen ${}_j M_i \neq \emptyset$ nach Satz 4a den Widerspruch ${}_i R_i \neq \emptyset$. Damit ist c) bewiesen.

Einer ausführlichen Diskussion von Satz 10 ist der nächste Paragraph gewidmet. Zuvor sei jedoch ein Ergebnis formuliert, das im Anschluß an den letzten Beweis besonders leicht zugänglich ist.

Satz 11.

- a) Ist ${}_j M_i \neq \emptyset$, so gilt ${}_i R_j = \emptyset$ oder ${}_i R_j^* = {}_i M_j$.
 b) Ist P irreduzibel, so gilt entweder

$${}_i R_j = \emptyset \text{ für alle } i, j \in I \text{ oder } {}_i R_j^* = {}_i M_j \text{ für alle } i, j \in I.$$

- c) Ist P irreduzibel und $|I| < \infty$, so gilt entweder

$${}_i R = \emptyset \text{ für alle } i \in I \quad \text{oder} \quad {}_i R^* = {}_i M \text{ für alle } i \in I.$$

Beweis. a) 1. Ist i transient, so gilt bekanntlich $P_i(a_n = i \text{ für unendlich viele } n) = 0$ und damit trivialerweise ${}_i R_i = \emptyset$. Bei rekurrentem i können die Zwischensummen $S_{i,r}$ ($r \in \mathbb{N}$) definiert werden, und man erhält aus (7.6) sowie Satz 8 und Teil a) der Ausführungen vor Satz 8, daß entweder ${}_i R_i = \emptyset$ oder ${}_i R_i^* = {}_i M_i$ gilt. Es ist also für jedes $i \in I$ stets ${}_i R_i = \emptyset$ oder ${}_i R_i^* = {}_i M_i$.

2. Es sei ${}_i R_i = \emptyset$. Aus $x \in {}_i R_j$ und $y \in {}_j M_i$ folgt nach Satz 4a, daß $x+y \in {}_i R_i$ im Widerspruch zu ${}_i R_i = \emptyset$. Also gilt ${}_i R_j = \emptyset$.

3. Es sei ${}_i R_i^* = {}_i M_i \neq \emptyset$. Nach dem Korollar zu Satz 5 folgt $0 \in {}_i R_i^*$ und damit ${}_i R_j^* = {}_i M_j$ nach Satz 4a.

b) Bei Irreduzibilität ist die Voraussetzung von Teil a) für alle i und j erfüllt, so daß für jedes Paar (i,j) entweder

${}_iR_j = \emptyset$ oder ${}_iR_j^* = {}_iM_j \neq \emptyset$ gilt. Ist jedoch ${}_iR_j \neq \emptyset$ für irgendein Paar (i, j) , so folgt für beliebige $k, l \in I$ aus ${}_kM_l \neq \emptyset$ und ${}_jM_l \neq \emptyset$ mittels Satz 2c und Satz 4a sofort ${}_kR_l \neq \emptyset$, d.h. die Beziehung ${}_iR_j \neq \emptyset$ ist klasseninvariant.

c) Teil c) folgt aus Teil b) mittels Satz 7.

Bemerkung 6. Das erste der beiden unter Bemerkung 5 (§ 4) angegebenen Beispiele zeigt, daß die Voraussetzung ${}_jM_i \neq \emptyset$ in Teil a) wesentlich ist. In diesem Beispiel gilt ${}_0R_1 = {}_0M_1 = \{0\}$ und ${}_0R_1^* = \emptyset$.

Satz 11b gestattet zusammen mit Satz 7b einen neuen, kurzen Beweis für Satz 7c: Ist P irreduzibel und $|I| < \infty$, so gilt

$${}_iR^* \supset \bigcup_{j \in I} {}_iR_j^* = \bigcup_{j \in I} {}_iR_j = {}_iR \supset {}_iR^*,$$

$$\text{also } {}_iR^* = \bigcup_{j \in I} {}_iR_j^*.$$

Daß die Irreduzibilität für Satz 11b und 11c wesentlich ist, ist trivial. Das folgende Beispiel einer transienten Kette zeigt, daß diese Voraussetzung in Satz 11c allein nicht genügt. Wir vermuten jedoch, daß die Voraussetzung " $|I| < \infty$ " zu "P rekurrent" abgeschwächt werden kann.

Bsp. 3. $a_0, a_1, a_2, \dots$ sei eine nach rechts tendierende BERNOULLI-Irrfahrt, also $I = \mathbb{Z}$ und $P(i, i+1) = p$ und $P(i, i-1) = 1-p$ für alle $i \in I$, wobei $\frac{1}{2} < p < 1$. Ferner sei $d=1$ und $f(0) = 1$ und $f(i) = 0$ für $0 \neq i \in I$. Aus

$$P_i(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty) = 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}$$

folgt sofort

$$\begin{aligned} 0 &< P_1(a_n = 0 \text{ für genau } m \text{ natürliche Zahlen } n) \\ &= P_1(s_n = m \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) < 1 \end{aligned}$$

für $i \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$ und für $i < 0$, $m \in \mathbb{N}$. Für alle anderen Paare (i, m) ganzer Zahlen gilt trivialerweise

$$P_i(s_n = m \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) = 0,$$

so daß

$$\begin{aligned} {}_iR^* &= \emptyset \quad \text{für alle } i \in I, \\ {}_iR &= \begin{cases} \mathbb{Z}^+ & \text{für } i \geq 0, \\ \mathbb{N} & \text{für } i < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

§ 8. Bemerkungen und Beispiele.

Die Voraussetzungen (7.1) bzw. (7.2) in Satz 10, die die Existenz des ersten (bei $d=1$) bzw. zweiten (bei $d=2$) Momentes der Zwischensummen $S_{i,r,\delta}$ erzwingen, sind aus zwei voneinander unabhängigen Gründen keine notwendige Bedingung. Einerseits können die genannten Momente auch ohne (7.1) bzw. (7.2) existieren. Die bekannten Beispiele hierzu (s. CHUNG [1], Example I.15.1) sind allerdings durch quasi-deterministische Schleifen gekennzeichnet und können als pathologische Erscheinung angesehen werden. Andererseits ist die Existenz des ersten bzw. zweiten Momentes in den Sätzen von CHUNG und FUCHS keine notwendige Bedingung, was bereits in [2] durch Beispiele belegt ist.

Ist I eine positiv-rekurrente Klasse, also $\sum_j G^i(i,j) < \infty$ für alle $i \in I$, so folgt selbstverständlich die erste der drei unter (7.2) zusammengefaßten Ungleichungen aus der zweiten.

Die Voraussetzung von Satz 10c kann nicht durch die schwächere Bedingung " $\dim {}_iM \geq 3$ für ein $i \in I$ " ersetzt werden, wie das einfache Beispiel $I = \{0,1,2,3\}$, $P(0,1) = P(1,2) = P(2,3) = P(3,0) = 1$, $d=3$, $f(0) = (1,1,1)$, $f(1) = (-1,0,0)$, $f(2) = (0,-1,0)$, $f(3) = (0,0,-1)$ mit $\dim {}_iM = 3$, $\dim {}_iM_i = 0$ und ${}_iR_i^* = \{0\}$ für alle $i \in I$ zeigt.

Die teilweise Undurchsichtigkeit der Bedingungen (7.1) und (7.2) macht es wünschenswert, Klassen Markovscher Ketten zu kennen, in denen diese Bedingungen automatisch erfüllt sind oder durch einfachere ersetzt werden können.

a) Ist $f \equiv 1$, so bedeutet die Zwischensumme $S_{i,r}$ offenbar genau die Wartezeit zwischen dem r -ten und $(r+1)$ -ten Durchgang des Zustandes i . Hieraus folgt leicht, daß (7.1) bzw. (7.2) erfüllt ist, wenn f beschränkt ist und der Erwartungswert bzw. die Varianz der genannten Wartezeit existiert, was bedeutet (s. KEMENY-SNELL-KNAPP [11], S. 273), daß die rekurrente Klasse i einen Ergodizitätsgrad ≥ 1 bzw. ≥ 2 besitzt.

b) Ist $P(i,j) = p(j) \quad (i,j \in I)$, also $(f(a_n); n \in \mathbb{Z}_+)$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter d -dimensionaler Zufallsvariablen, so ist $G^i(j,k) = G^i(i,k)$ und $G^i(i,k)$ proportional zu $p(k)$, und (7.1) bzw. (7.2) bedeutet genau die Existenz des 1. bzw. 2. Momentes der $f_\delta(a_1) \quad (\delta=1,\dots,d)$. Wir erhalten so die im Beweis verwendeten Ergebnisse von CHUNG und FUCHS als Spezialfall von Satz 10 zurück.

c) (7.1) und (7.2) sind trivialerweise erfüllt, wenn f einen endlichen Träger besitzt ($f(i) = 0$ außerhalb einer endlichen Teilmenge von I). Etwas spezieller gilt

Satz 12. Es sei $|I| < \infty$ und P irreduzibel.

a) Ist $d \leq 2$ und $\sum_j G^i(i,j) f(j) = 0$, so gilt

$${}_i R_j^* = {}_i M_j \quad \text{und} \quad {}_i R^* = {}_i M \quad \text{für alle } i,j \in I.$$

b) Ist $\dim {}_i M_i \geq 3$ oder $\sum_j G^i(i,j) f(j) \neq 0$, so gilt

$${}_i R = \emptyset \quad \text{für alle } i \in I.$$

Beweis. Jede endliche irreduzible Markov-Kette ist rekurrent. Satz 12 folgt daher aus Satz 10 und Satz 7b.

Da wir davon ausgehen können, daß für endliche irreduzible Matrizen P die Größen $G^i(i,j)$ bis auf eine Konstante als Lösung des Gleichungssystems (6.1) prinzipiell stets bestimmt werden können, ist das Rekurrenzproblem für diesen Fall durch Satz 12 gelöst.

Besonders einfach wird das Rekurrenzkriterium in dem wichtigen Spezialfall einer doppelt-stochastischen Übergangs-

matrix P ($\sum_i P(i,j) = 1$ für alle $j \in I$):

Korollar. Es sei $|I| < \infty$ und P eine doppelt-stochastische irreduzible Matrix.

a) Ist $d \leq 2$ und $\sum_i f(i) = 0$, so gilt

$${}_i R_j^* = {}_i M_j \text{ und } {}_i R^* = {}_i M \text{ für alle } i, j \in I.$$

b) Ist $\dim {}_i M_i \geq 3$ oder $\sum_i f(i) \neq 0$, so gilt

$${}_i R = \emptyset \text{ für alle } i \in I.$$

Beweis. Bei doppelt-stochastischem P ist $u(i) \equiv 1$ ein P -invariantes Maß auf I . Nach § 6 ist daher $G^i(i,j)$ unabhängig von j .

Die folgende Anwendung dieses Korollars umfaßt einen von GILLIS [10] betrachteten Prozeß und zugleich die 2-dimensionale POLYAsche Irrfahrt.

Bsp. 4. Zum Zeitpunkt 0 springe ein Teilchen aus dem Nullpunkt des $\mathbb{R}^2$ mit der Wahrscheinlichkeit p_1, p_2, p_3 bzw. p_4 in den Gitterpunkt $(1,0), (0,1), (-1,0)$ bzw. $(0,-1)$

($p_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, 4$; $\sum_{1 \leq i \leq 4} p_i = 1$). Nach Ablauf jeder

folgenden Zeiteinheit springe das Teilchen in einen der vier Nachbar-Gitterpunkte des zuletzt erreichten Punktes, und zwar - bezogen auf die Richtung seines letzten Sprunges - mit der Wahrscheinlichkeit q_1 geradeaus weiter, der Wahrscheinlichkeit q_2 nach links, der Wahrscheinlichkeit q_3 zurück und der Wahrscheinlichkeit q_4 nach rechts ($q_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, 4$; $q_2 + q_4 > 0$; $\sum_{1 \leq i \leq 4} q_i = 1$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

daß das Teilchen unendlich oft den Nullpunkt passiert?

Das zugehörige wahrscheinlichkeitstheoretische Modell besteht aus einer homogenen Markovschen Kette $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ mit dem Zustandsraum

$$I = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P = (P(i, j))_{i, j \in I} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,0) & (0,1) & (-1,0) & (0,-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,0) \\ (0,1) \\ (-1,0) \\ (0,-1) \end{matrix} & \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_4 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_4 & q_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

und dem 2-dimensionalen Funktional

$$f(i) = i \quad \text{für } i \in I.$$

Die Folge der Zufallsvariablen $s_n = \sum_{v=1}^n f(a_v)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$)

beschreibt die Bewegung des Teilchens im $\mathbb{R}^2$. P ist doppeltstochastisch und wegen $q_2 + q_4 > 0$ irreduzibel, und es gilt

$$\sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i \in I} i = (1,0) + (0,1) + (-1,0) + (0,-1) = (0,0).$$

Aus dem Korollar zu Satz 12 folgt daher ${}_i R^* = {}_i M$, insbesondere $(0,0) \in {}_i R^*$ für alle $i \in I$. Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit für unendlich viele Null-Durchgänge des Teilchens jedenfalls dann 1 ist, wenn die Zufallsvariable a_1 , die für den ersten Sprung des Teilchens zuständig ist, die Verteilung $P(a_1 = (1,0)) = p_1, \dots, P(a_1 = (0,-1)) = p_4$ besitzt. Bei gegebenen p_i ist dies im allgemeinen nicht durch geeignete Wahl der Verteilung von a_0 erreichbar. Da jedoch die Startverteilung p für die Rückkehr zum Nullpunkt aus Symmetriegründen völlig bedeutungslos ist, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit schließlich für beliebige $p_1, \dots, p_4$ gleich 1. - POLYA behandelte den Spezialfall $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{1}{4}$ unabhängiger a_n , GILLIS den Spezialfall $q_1 = q_3 = 0$.

Betrachten wir schließlich die in den Kriterien des Satzes 10 geforderte Irreduzibilität und Rekurrenz.

Der Fall, daß der Zustandsraum I aus mehreren rekurrenten Klassen besteht, ist trivialerweise auf den Fall einer einzigen Klasse reduzierbar, da die zur Zeit 0 betretene Klasse

mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht wieder verlassen wird. Enthält I lediglich transiente Zustände, so gilt $P_i(a_n = j \text{ für unendlich viele } n) = 0$ für alle $i, j \in I$, also ist erst recht $iR_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$. Zur Bestimmung der iR verfügen wir hier über keine systematische Methode. Existieren jedoch eine Funktion $g: I \rightarrow I'$ (I' geeignet) derart, daß

$$f(i) = f(j), \text{ falls } g(i) = g(j),$$

und die Folge der $a'_n := g(a_n)$ eine rekurrente Markovsche Kette ist, so gibt es eine Funktion $f': I' \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $f = f' \circ g$ (d.h. $f(i) = f'(g(i))$ für alle $i \in I$), und das Problem ist damit auf den Fall einer rekurrenten Kette zurückgeführt. Diese Situation liegt im folgenden Beispiel vor.

Für $J \subset \mathbb{Z}^d$ bezeichne $\mathcal{G}(J)$ die von J erzeugte Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Z}^d$. Wir nennen eine d-dimensionale Irrfahrt normalisiert, wenn $\mathcal{G}(\{i \in \mathbb{Z}^d: P(0, i) > 0\}) = \mathbb{Z}^d$ gilt. (Gebräuchlich ist die Bezeichnung "aperiodisch", die jedoch bereits für allgemeine Markov-Ketten in anderer Bedeutung (s. Anhang) vergeben ist. So ist etwa die als Bsp. 3 in § 7 betrachtete BERNOULLI-Irrfahrt normalisiert und periodisch.) Offenbar ist eine rekurrente Irrfahrt genau dann normalisiert, wenn der Zustandsraum $\mathbb{Z}^d$ minimal ist.

Bsp. 5. $a_0 \equiv 0$, $a_1, a_2, \dots$ sei eine beliebige 1-dimensionale normalisierte Irrfahrt. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($d=1$ oder 2) sei periodisch, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(i) = f(i+m)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$P\left(\sum_{v=1}^n f(a_v) = 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^m f(i) = 0, \\ 0, & \text{falls } \sum_{i=1}^m f(i) \neq 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $i \in \mathbb{Z}$ sei

$$g(i) := \mu, \text{ falls } i \equiv \mu \pmod{m} \text{ und } \mu \in \{1, \dots, m\}.$$

Dann ist $a'_n := g(a_n)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) eine homogene Markovsche Kette

mit dem endlichen Zustandsraum $I' = \{1, \dots, m\}$, deterministischem Start in m und den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(i', j') = P(a_1 \equiv j' - i') \quad (i', j' \in I').$$

Da die Irrfahrt $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ normalisiert ist, ist die Kette $(a'_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ irreduzibel. Die Matrix P' ist doppelt-stochastisch. Es gilt

$$f(i) = f(g(i)) \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Aus dem Korollar zu Satz 12 folgt daher sofort

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{v=1}^n f(a_v)\right) &= 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ &= P\left(\sum_{v=1}^n f(a'_v)\right) = 0 \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{i \in I'} f(i) = 0, \\ 0, & \text{falls } \sum_{i \in I'} f(i) \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Als Folgerung ergibt sich u.a., daß es für jede 1-dimensionale normalisierte Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Zeitpunkte gibt, zu denen die Irrfahrt die Menge der geraden Zahlen ebensooft wie die Menge der ungeraden Zahlen besucht hat. Weitere Ergebnisse dieser Art erhalten wir im nächsten Paragraphen.

§ 9. Kombinatorische Anwendungen.

Es erweist sich als zweckmäßig, einige weitere Bezeichnungen einzuführen.

Def. 6. a) m -Teilmengen $J_1, \dots, J_m$ der Menge I heißen linear abhängig, wenn ihre Indikatorfunktionen $\chi_{J_1}, \dots, \chi_{J_m}$ linear abhängig sind, d.h. wenn reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ existieren, die

nicht alle verschwinden und für die gilt

$$\sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} \chi_{J_{\mu}}(i) = 0 \text{ für alle } i \in I.$$

Andernfalls heißen die Teilmengen $J_1, \dots, J_m$ linear unabhängig.

b) Die Maximalzahl linear unabhängiger Mengen unter den Mengen $J_1, \dots, J_m$ heißt Rang des Teilmengensystems, symbolisch $\text{Rg}\{J_1, \dots, J_m\}$.

Bemerkung 7. Disjunkte, nicht-leere Teilmengen von I sind linear unabhängig. Das System der 4 Teilmengen $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,1\}$ von $\mathbb{Z}$ hat den Rang 3.

Def. 7. Für $J \subset I$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_n(J)$ die (von $\omega \in \Omega$ abhängige) Anzahl der Besuche in J der Markovschen Kette $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ vom Zeitpunkt 1 bis zum Zeitpunkt n :

$$\alpha_n(J) := |\{v: 1 \leq v \leq n \text{ und } a_v \in J\}| \quad (J \subset I, n \in \mathbb{N}).$$

Satz 13. Es seien $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ eine rekurrente normalisierte d -dimensionale Irrfahrt, $J_1, \dots, J_m$ endliche Teilmengen des Zustandsraumes $I = \mathbb{Z}^d$ ($m \geq 2$),

$$\pi := \mathbb{P}_0(\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_m) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}),$$

$$\pi^* := \mathbb{P}_0(a_n = 0 \text{ und } \alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_m) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt

a) Ist $\text{Rg}\{J_1, \dots, J_m\} \leq 3$ und $|J_1| = \dots = |J_m|$,
so gilt $\pi = \pi^* = 1$.

b) Ist $\text{Rg}\{J_1, \dots, J_m\} > 3$ oder nicht $|J_1| = \dots = |J_m|$,
so gilt $\pi = \pi^* = 0$.

Beweis. a) 1. Es seien $r := \text{Rg}\{J_1, \dots, J_m\}$ und - ohne Einschränkung der Allgemeinheit - $J_1, \dots, J_r$ r linear unabhängige Mengen des Systems $\{J_1, \dots, J_m\}$. Wir zeigen zunächst, daß unter der Voraussetzung von Teil a) aus

$$\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_r)$$

die Gleichungskette

$$\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_m)$$

folgt. In der Tat existieren zu jedem Index μ mit $r < \mu \leq m$ reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (abhängig von μ) mit

$$\chi_{J_\mu} = \sum_{q=1}^r \lambda_q \chi_{J_q},$$

da $J_1, \dots, J_r$ linear unabhängig, aber $J_1, \dots, J_r, J_\mu$ linear abhängig sind. Aus

$$\begin{aligned} |J_\mu| &= \sum_{i \in I} \chi_{J_\mu}(i) = \sum_{i \in I} \sum_{q=1}^r \lambda_q \chi_{J_q}(i) \\ &= \sum_{q=1}^r \lambda_q \sum_{i \in I} \chi_{J_q}(i) = \sum_{q=1}^r \lambda_q |J_q| \end{aligned}$$

und $|J_1| = \dots = |J_r| = |J_\mu|$ erhält man

$$\sum_{q=1}^r \lambda_q = 1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \alpha_n(J_\mu) &= \sum_{v=1}^n \chi_{J_\mu}(a_v) \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{q=1}^r \lambda_q \chi_{J_q}(a_v) \\ &= \sum_{q=1}^r \lambda_q \alpha_n(J_q) = \alpha_n(J_1). \end{aligned}$$

2. Nach 1. brauchen wir uns zum Beweis von Teil a) um die Mengen $J_{r+1}, \dots, J_m$ nicht zu kümmern. Damit ist die Behauptung für $r=1$ trivial (Rekurrenz der Irrfahrt), und für den Rest des Beweises von Teil a) kann $r \in \{2, 3\}$ vorausgesetzt werden. Wir definieren das $(r-1)$ -dimensionale Funktional $f = (f_1, \dots, f_{r-1})$ durch

$$f_q(i) := \chi_{J_q}(i) - \chi_{J_r}(i) \quad (q=1, \dots, r-1).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bedeutet $s_n = \sum_{v=1}^n f(a_v) = 0$ dann genau

$\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_R)$, und Behauptung a) erweist sich als gleichwertig mit $0 \in {}_0R_0^*$. Die Bedingungen (7.1) und (7.2) in Satz 10 sind erfüllt, da f endlichen Träger besitzt. Da P doppelt-stochastisch ist, sind die Größen $G^i(i, j)$ unabhängig von j , und aus der Bedingung $\sum_j G^i(i, j) f(j) = 0$ wird

$$\sum_i f(i) = 0. \text{ Diese Gleichung gilt wegen } |J_1| = \dots = |J_R|.$$

Aus Satz 10 erhalten wir damit ${}_iR_j^* = {}_iM_j$ für alle i und j , speziell $0 \in {}_iR_1^*$ nach dem Korollar zu Satz 5.

b) 1. Es sei nicht $|J_1| = \dots = |J_m|$. O.E.d.A. können wir $|J_1| \neq |J_2|$ annehmen und das 1-dimensionale Funktional

$$f(i) := \chi_{J_1}(i) - \chi_{J_2}(i) \quad (i \in I)$$

definieren. Es gilt $\sum_{i \in I} f(i) = |J_1| - |J_2| \neq 0$, und aus Satz 10b folgt ${}_0R = \emptyset$, speziell $0 \notin {}_0R$. Das bedeutet

$$P_0(\alpha_n(J_1) = \alpha_n(J_2) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) = 0,$$

so daß erst recht $\pi = \pi^* = 0$.

2. Es verbleibt zu beweisen, daß auch aus $\text{Rg}\{J_1, \dots, J_m\} > 3$ die Gleichung $\pi = \pi^* = 0$ folgt. Wir führen zunächst eine Vorbetrachtung durch.

Nach Voraussetzung existiert zu jedem Punktepaar (i', i'') mit $i' \neq i''$ ein "positiver Verbindungsweg", d.h. eine Folge $i' = i_0, i_1, \dots, i_s = i''$ von Zuständen mit

$P(i_{\sigma-1}, i_\sigma) > 0$ für $\sigma = 1, \dots, s$. Beliebige Umordnung der s Einzelschritte eines positiven Verbindungsweges ergibt wieder einen positiven Verbindungsweg von i' nach i'' . Die durch i'' verlaufende senkrecht auf der Geraden $i'i''$ stehende Hyperebene (Gerade im Falle $d=2$ und Punkt i'' im Falle $d=1$; die Voraussetzungen des Satzes implizieren $d \leq 2$) heiße $H(i', i'')$. Die erwähnte Umordnungsmglichkeit läßt sich verwenden, um aus einem beliebigen positiven Verbindungsweg von i' nach i'' einen posi-

tiven Verbindungsweg von i' nach i'' zu konstruieren, der ganz auf einer Seite von $H(i', i'')$ verläuft: Man führe zunächst alle Schritte durch, die von $H(i', i'')$ zur erlaubten Seite wegführen und hole dann alle übrigen Schritte in beliebiger Reihenfolge nach. Analog findet man einen positiven Verbindungsweg von i'' nach i' , der ganz auf einer Seite von $H(i', i'')$ liegt. Zusammensetzung beider Wege ergibt einen ganz auf einer Seite von $H(i', i'')$ verlaufenden geschlossenen positiven Verbindungsweg von i' über i'' zurück nach i' .

3. Es sei $\text{Rg}\{J_1, \dots, J_m\} > 3$. O.E.d.A. seien J_1, J_2, J_3 und J_4 linear unabhängig. Wir betrachten das 3-dimensionale Funktional $f = (f_1, f_2, f_3)$ mit

$$f_q(j) := \chi_{J_q}(j) - \chi_{J_4}(j) \quad (q=1,2,3; j \in I)$$

und zeigen

$$\dim {}_i M_i = 3. \quad (9.1)$$

Wegen der Klasseninvarianz dieser Gleichung können wir hierbei den Punkt i günstig wählen: i liege außerhalb der konvexen Hülle von $J_1 \cup \dots \cup J_4$ und - relevant nur im Falle $d=2$ - habe zu keinen zwei Punkten von $J_1 \cup \dots \cup J_4$ den gleichen Abstand. Diese Wahl ist möglich, da die endlich vielen Mittelsenkrechten von Punkten aus $J_1 \cup \dots \cup J_4$ den Zustandsraum $\mathbb{Z}^2$ nicht überdecken.

Wäre $\dim {}_i M_i < 3$, so läge ${}_i M_i$ in einem 2-dimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^3$, d.h. es gäbe reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die nicht alle verschwinden, mit

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0 \text{ für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in {}_i M_i.$$

Für jeden geschlossenen positiven Verbindungsweg

$i = i_0, i_1, i_2, \dots, i_s = i$ von i nach i wäre

$$\sum_{\sigma=1}^s f(i_\sigma) = \sum_{\sigma=1}^s (\chi_{J_1}(i_\sigma) - \chi_{J_4}(i_\sigma), \chi_{J_2}(i_\sigma) - \chi_{J_4}(i_\sigma), \chi_{J_3}(i_\sigma) - \chi_{J_4}(i_\sigma))$$

ein Punkt der durch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ bestimmten

Hyperebene, d.h.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^s [\lambda_1 \chi_{J_1}(i_\sigma) + \lambda_2 \chi_{J_2}(i_\sigma) + \lambda_3 \chi_{J_3}(i_\sigma) \\ - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \chi_{J_4}(i_\sigma)] = 0. \end{aligned} \right\} (9.2)$$

Wäre nun

$$\lambda_1 \chi_{J_1} + \lambda_2 \chi_{J_2} + \lambda_3 \chi_{J_3} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \chi_{J_4} \neq 0,$$

so gäbe es ein j minimalen Abstandes von i mit

$$\lambda_1 \chi_{J_1}(j) + \lambda_2 \chi_{J_2}(j) + \lambda_3 \chi_{J_3}(j) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \chi_{J_4}(j) \neq 0.$$

Für einen (nach dem letzten Beweisteil vorhandenen) geschlossenen positiven Weg von i über j zurück nach i , der ganz auf einer Seite von $H(i, j)$ verläuft, ist genau ein Summand der Summe (9.2) $\neq 0$. Das widerspricht (9.2), so daß

$$\lambda_1 \chi_{J_1} + \lambda_2 \chi_{J_2} + \lambda_3 \chi_{J_3} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \chi_{J_4} = 0.$$

Diese Gleichung widerspricht jedoch der linearen Unabhängigkeit der vier Mengen $J_1, \dots, J_4$, und das beweist (9.1).

Aus $\dim {}_i M_1 = 3$ folgt nach Satz 10c, daß ${}_i R_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$, speziell $0 \notin {}_0 R_j$ für alle $j \in \mathbb{Z}^d$. Nach Definition des Funktional f bedeutet dies

$\mathbb{P}_0(a_n = j \text{ und } \alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4) \text{ für unendlich viele } n) = 0$
für alle $j \in \mathbb{Z}^d$.

4. Angenommen, es ist $0 \in {}_0 R$, also

$$\mathbb{P}_0(\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4) \text{ für unendlich viele } n) > 0.$$

Da $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ rekurrent und normalisiert ist, gilt trivialerweise

$$\mathbb{P}_0(\text{"nicht } \alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4) \text{" für unendlich viele } n) = 1.$$

Hieraus folgt

$$\mathbb{P}_0(\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4) \text{ und nicht } \alpha_{n-1}(J_1) = \dots = \alpha_{n-1}(J_4))$$

für unendlich viele $n) > 0$.

Aus " $\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4)$ und nicht $\alpha_{n-1}(J_1) = \dots = \alpha_{n-1}(J_4)$ " folgt $a_n \in J_1 \cup \dots \cup J_4$. Die letzte Ungleichung ergibt damit

$$\mathbb{P}_0(\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4) \text{ und } a_n \in J_1 \cup \dots \cup J_4$$

für unendlich viele $n) > 0$.

Wegen $|J_1 \cup \dots \cup J_4| < \infty$ folgt für geeignetes $j \in J_1 \cup \dots \cup J_4$

$$\mathbb{P}_0(\alpha_n(J_1) = \dots = \alpha_n(J_4) \text{ und } a_n = j \text{ für unendlich viele } n) > 0.$$

Das bedeutet $0 \in {}_0R_j$ und widerspricht dem 3. Teil des Beweises.

Damit gilt $0 \notin {}_0R$, d.h. $\pi = \pi^* = 0$, w.z.b.w.

Der Fall zweier unendlicher Mengen J_1, J_2 liegt im folgenden Satz vor. Die dort betrachtete Markov-Kette ist im wesentlichen die symmetrische, 1-dimensionale BERNOLLI-Irrfahrt, die jedoch zur Vereinfachung des Beweises geringfügig modifiziert wird.

Satz 14. $a_0, a_1, \dots$ sei eine homogene Markovsche Kette mit dem Zustandsraum

$$I = \{(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2: |i_1 - i_2| = 1\},$$

den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i_2 = j_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i = (i_1, i_2), j = (j_1, j_2) \in I)$$

und Start im Zustand $(1, 0)$: $p((1, 0)) = \mathbb{P}(a_0 = (1, 0)) = 1$.

Ferner sei

$$f(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \max(i_1, i_2) > 0 \\ -1 & \text{falls } \min(i_1, i_2) < 0 \end{cases} \quad (i = (i_1, i_2) \in I).$$

Dann gilt

$$a) \quad R_i = \emptyset \quad \text{für alle } i \in I,$$

$$b) \quad R^* = M = \mathbb{Z}.$$

Beweis. a) 1. Es sei

$$K := \{(1,0), (-1,0)\} \subset I.$$

Trivialerweise gilt

$$\mathbb{P}(s_n=0 \text{ und } a_n \in K) = 0, \text{ wenn } n \not\equiv 0 \pmod{4}.$$

Eine bekannte kombinatorische Überlegung (s. FELLER [7], Abschnitt III.9, S. 94) zeigt

$$\mathbb{P}(s_{4n} = 0 \text{ und } a_{4n} \in K) = \frac{1}{2n+1} \cdot \binom{4n}{2n} \cdot 2^{-4n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nach der STIRLINGschen Formel gilt

$$\binom{4n}{2n} \cdot 2^{-4n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(s_n=0 \text{ und } a_n \in K) < \infty,$$

und das Lemma von BOREL-CANTELLI ergibt

$$\mathbb{P}(s_n=0 \text{ und } a_n=(1,0) \text{ für unendlich viele } n) = 0,$$

$$\text{d.h. } 0 \notin R_{(1,0)} = (1,0)^{R(1,0)}.$$

2. Angenommen, es sei $x \in \mathbb{Z}$, $(i_1, i_2) \in I$ und

$$x \in (1,0)^{R(i_1, i_2)}. \quad (0.)$$

Dann ist erst recht

$$x \in (1,0)^{M(i_1, i_2)},$$

und da sich jeder von $(1,0)$ nach (i_1, i_2) führende "positive

Weg" (vgl. Beweisteil b)2 zu Satz 13) auch in umgekehrter Richtung durchlaufen läßt, erhält man

$$x + 1 \in (i_1, i_2)^M(0, 1). \quad (9.4)$$

Andererseits sieht man leicht

$$-2x - 1 \in (0, 1)^M(1, 0). \quad (9.5)$$

(9.4) und (9.5) ergeben nach Satz 2a

$$-x \in (i_1, i_2)^M(1, 0). \quad (9.6)$$

Aus (9.3) und (9.6) folgt nach Satz 4a der gewünschte Widerspruch $0 \in (1, 0)^R(1, 0)$ zu Teil 1.

b) 1. Da die symmetrische BERNOULLI-Irrfahrt rekurrent ist, ist auch die unwesentlich modifizierte irreduzible Kette $(a_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ rekurrent. Wir können daher - ganz analog zur Definition der Größen $t_{i,r}$ und $S_{i,r}$ im Beweisteil 0. von Satz 10 - die zur 2-elementigen Zustandsmenge K gehörenden Eintrittszeiten $t_{K,r}$ und Zwischensummen $S_{K,r}$ ($r \in \mathbb{N}$) einführen:

$$t_{K,1}(\omega) := 0 \quad (\omega \in \Omega),$$

$$t_{K,r+1}(\omega) := \min \{n > t_{K,r}(\omega) : a_n(\omega) \in K\} \quad (r \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega),$$

$$S_{K,r}(\omega) := \sum_{t_{K,r}(\omega) < n \leq t_{K,r+1}(\omega)} f(a_n(\omega)) \quad (r \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega).$$

Wegen $P((1,0),j) = P((-1,0),j)$ für alle $j \in I$ bilden die $S_{K,r}$ auch hier eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Auf Grund ihrer Definition sind die Zufallsvariablen $S_{K,r}$ symmetrisch verteilt. Die Folge

$$s_{t_{K,r}} = \sum_{s=1}^{r-1} S_{K,s} \quad (r \in \mathbb{N})$$

ist daher eine 1-dimensionale symmetrische Irrfahrt. Jede solche Irrfahrt wechselt mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich

oft das Vorzeichen (SPITZER [15], E 17.1, S. 182-185). Da $(s_{t_{K,r}}; r \in \mathbb{N})$ eine Teilfolge der Folge $(s_n; n \in \mathbb{Z}_+)$ ist, finden auch in der letzten Folge mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Vorzeichenwechsel statt. Wegen $|f(i)| \equiv 1$ folgt hieraus

$$P(s_n=0 \text{ für unendlich viele } n) = 1, \quad (9.7)$$

also $0 \in R^*$.

2. Zu gegebenem $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, sei

$$J(x) := \{(i_1, i_2) \in I : \min(|i_1|, |i_2|) > |x|\}.$$

Aus Teil a) folgt

$$P(s_n=0 \text{ und } a_n \in J \text{ für unendlich viele } n) = 0 \text{ für alle } J \subset I \text{ mit } |J| < \infty.$$

Hieraus und aus (9.7) erhält man

$$P(s_n=0 \text{ und } a_n \in J(x) \text{ für unendlich viele } n) = 1. \quad (9.8)$$

Da das Ereignis $s_n=0$ immer abwechselnd im positiven und im negativen Bereich ($\max(i_1, i_2) > 0$ bzw. $\min(i_1, i_2) < 0$) stattfinden muß, schließt man aus (9.8)

$$P(s_n=x \text{ für unendlich viele } n) = 1,$$

d.h. $x \in R^*$.

Satz 14b besagt insbesondere, daß es bei einer symmetrischen BERNOULLI-Irrfahrt mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Zeitpunkte $n \in \mathbb{N}$ gibt, bis zu denen die Irrfahrt genauso viele Einheitsetappen oberhalb des Nullpunktes wie unterhalb des Nullpunktes durchläuft. Die dem 1. Teil des Beweises zu Satz 14b zugrunde liegende Idee gestattet offenbar auch die folgende weniger spezielle Aussage:

Korollar. $a_0, a_1, \dots$ sei eine symmetrische rekurrente d -dimensionale Irrfahrt und $J \subset \mathbb{Z}^d$ beliebig. Dann gibt es

mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Zeitpunkte $n \in \mathbb{N}$, zu denen die Irrfahrt die beiden Mengen J und $-J = \{i \in \mathbb{Z}^d: -i \in J\}$ gleich oft besucht hat.

Anhang: Einige Grundbegriffe der Theorie der Markovschen Ketten

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld, d.h. $\mathbb{P}$ sei ein normiertes Maß (Wahrscheinlichkeit) auf dem σ -Ring $\mathcal{F}$ (der Ereignisse) über der Grundmenge Ω (der Ergebnisse), und I eine beliebige abzählbare Menge. Eine Funktion $a: \Omega \rightarrow I$ heißt zufällige Größe zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und dem Wertebereich I , wenn $\{\omega \in \Omega: a(\omega) = i\} \in \mathcal{F}$ für alle $i \in I$ gilt.

Eine Folge $a_0, a_1, \dots$ zufälliger Größen zum Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und dem Wertebereich I heißt Markovsche Kette mit dem Zustandsraum I , wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i_v \in I$ ($v=0, \dots, n$) mit $\mathbb{P}(a_v = i_v \text{ für } v=0, \dots, n-1) > 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a_n = i_n | a_v = i_v \text{ für } v=0, \dots, n-1) \\ = \mathbb{P}(a_n = i_n | a_{n-1} = i_{n-1}) \end{aligned} \quad (*)$$

gilt. Der Zustandsraum I kann dabei o.E.d.A. als minimal angenommen werden, d.h. zu jedem $i \in I$ existiere ein $n \geq 0$ mit $\mathbb{P}(a_n = i) > 0$.

Für $\emptyset \neq S \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichne $\mathcal{F}(a_n; n \in S)$ den von allen Ereignissen der Form $\{a_n = i\}$ ($n \in S, i \in I$) erzeugten σ -Ring, d.h. den kleinsten σ -Ring, bezüglich dessen die Funktionen $a_n, n \in S$, meßbar sind. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B^- \cap B^+ | a_n = i) = \mathbb{P}(B^- | a_n = i) \cdot \mathbb{P}(B^+ | a_n = i),$$

$$\text{falls } \mathbb{P}(a_n = i) > 0, B^- \in \mathcal{F}(a_v; v \leq n), B^+ \in \mathcal{F}(a_v; v \geq n).$$

("Vergangenheit und Zukunft sind bei exakt bekannter Gegenwart voneinander unabhängig.")

Sind die Wahrscheinlichkeiten (*) unabhängig vom Zeitparameter n , so heißt die Markov-Kette homogen. In diesem Fall heißen die Größen $p(i) := \mathbb{P}(a_0 = i)$ bzw. $P(i, j) := \mathbb{P}(a_n = j | a_{n-1} = i)$

Start- bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten der Kette. Wir fassen die Startwahrscheinlichkeiten $p(i)$ ($i \in I$) zum stochastischen Vektor p und die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(i,j)$ ($i,j \in I$) zur stochastischen Matrix P zusammen. Zu jedem stochastischen Vektor p (d.h. $p(i) \geq 0$ und $\sum_{i \in I} p(i) = 1$) und

jeder stochastischen Matrix P (d.h. $P(i,j) \geq 0$ und $\sum_{j \in I} P(i,j) = 1$ für alle i) existiert nach dem Satz von

Kolmogorov eine homogene Markovsche Kette $a_0, a_1, \dots$ mit den Start- bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten $p(i)$ bzw. $P(i,j)$.

Für $i, j \in I$ sagen wir " i führt nach j " und schreiben $i \leadsto j$, wenn ein $s \in \mathbb{N}$ und eine Folge $i = i_0, i_1, \dots, i_s = j$ von Zuständen mit $P(i_{\sigma-1}, i_\sigma) > 0$ ($\sigma = 1, \dots, s$) existieren. Wir sagen, i sei äquivalent zu j , und schreiben $i \sim j$, wenn $i = j$ oder $i \leadsto j \leadsto i$ gilt. Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf I . Die zugehörigen Äquivalenzklassen werden Zustandsklassen oder einfach Klassen genannt. Die Äquivalenzrelation $\sim$ und die im nächsten Abschnitt erklärten Begriffe hängen nur von der Übergangsmatrix P , nicht aber vom Startvektor p ab. Besteht I aus einer einzigen Klasse, so heißen die Kette $a_0, a_1, \dots$ und die Matrix P irreduzibel.

Ein Zustand $i \in I$ heißt wesentlich, wenn aus $i \leadsto j$ stets $j \leadsto i$ folgt; andernfalls heißt i unwesentlich. Ein Zustand i heißt rekurrent, wenn die Markovsche Kette aus dem Zustand i mit Wahrscheinlichkeit 1 in den Zustand i zurückkehrt: $P(a_{n+r} = i \text{ für ein } r \in \mathbb{N} | a_n = i) = 1$, falls $P(a_n = i) > 0$. Ein nicht-rekurrenter Zustand heißt transient. Ist der Erwartungswert der Rückkehrzeit endlich, so heißt der rekurrente Zustand i positiv-rekurrent, andernfalls null-rekurrent. Der größte gemeinsame Teiler aller $r \in \mathbb{N}$ mit $P(a_{n+r} = i | a_n = i) > 0$ ($:= \infty$, falls ein solches r nicht existiert) heißt Periode des Zustandes i . i heißt periodisch bzw. aperiodisch, wenn die Periode > 1 bzw. $= 1$ ist.

Wesentlich/unwesentlich, rekurrent/transient,

positiv-rekurrent/null-rekurrent und periodisch/apperiodisch sind klasseninvariante Eigenschaften. Diese Eigenschaften sind daher auch für Klassen und für irreduzible Ketten bzw. irreduzible Übergangsmatrizen definiert.

Jeder rekurrente Zustand ist wesentlich. Es gilt

$$P(a_{n+r}=i \text{ für unendlich viele } r \in \mathbb{N} | a_n=i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \text{ rekurrent,} \\ 0, & \text{falls } i \text{ transient.} \end{cases}$$

Eine irreduzible Kette mit endlichem Zustandsraum ist daher stets rekurrent.

Ist $I = \mathbb{Z}^d$ ($d \in \mathbb{N}$), $p(0) = P(a_0=0) = 1$ und $P(i,j) = P(0,j-i)$ für alle $i,j \in I$ ("räumliche Homogenität"), so heißt $a_0, a_1, \dots$ d-dimensionale Irrfahrt. Für jede Irrfahrt ist die Folge der "Einzelschritte" $b_n := a_n - a_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}^d$, und umgekehrt ist die Folge der Partialsummen einer jeden Folge unabhängiger, identisch verteilter d-dimensionaler Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}^d$ eine Irrfahrt. Bei Irrfahrten sind stets entweder alle oder keine Zustände rekurrent, so daß von rekurrenten oder transienten Irrfahrten gesprochen werden kann.

Literaturverzeichnis

- [1] CHUNG, K.L.: Markov chains with stationary transition probabilities. Berlin, Heidelberg, New York 1960. 2. Aufl. 1967.
- [2] CHUNG, K.L. - FUCHS, W.H.J.: On the distribution of values of sums of random variables. Mem. Amer. Math. Soc. 6, 1-12. New York 1951.
- [3] CHUNG, K.L. - ORNSTEIN, D.: On the recurrence of sums of random variables. Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 30-32.
- [4] DERMAN, C.: A solution to a set of fundamental equations in Markov chains. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 332-334.
- [5] DÖBLIN, W.: Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaines dénombrables. Bull. Soc. Math. France 66 (1938), 210-220.
- [6] FELLER, W.: Note on the law of large numbers and "fair" games. Ann. Math. Stat. 16 (1945), 301-304.
- [7] FELLER, W.: An introduction to probability theory and its applications I. New York 1950. 3. Aufl. 1968.
- [8] FELLER, W.: An introduction to probability theory and its applications II. New York 1966.
- [9] GILLIS, J.: Correlated random walk. Proc. Cambr. Phil. Soc. 51 (1955), 639-651.
- [10] GILLIS, J.: A random walk problem. Proc. Cambr. Phil. Soc. 56 (1960), 390-392.
- [11] KEMENY, J.G. - SNELL, J.L. - KNAPP, A.W.: Denumerable Markov chains. Princeton 1966.
- [12] KOLMOGOROV, A.N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebn. Math. 2, H.3 (1933).
- [13] POLYA, G.: Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. Math. Ann. 84 (1921), 149-160.
- [14] RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin, Heidelberg, New York 1956. 2. Aufl. 1966.
- [15] SPITZER, F.: Principles of random walk. Princeton 1964.

Lebenslauf

Ich wurde am 18. Januar 1939 in Magdeburg geboren.

Von 1945 bis 1953 besuchte ich die achtklassige Grundschule in Biederitz bei Magdeburg. Die Oberschule besuchte ich in Ost-Berlin und nach unserer Übersiedelung in die Bundesrepublik 1957 einige Monate in Sindelfingen bei Stuttgart.

Von 1958 bis 1964 studierte ich in Tübingen und München Mathematik mit dem Diplom-Abschluß Anfang 1965. Ich hörte u.a. Vorlesungen bei den Professoren H. Kneser, G. Pickert, H. Wielandt, W. Braunbek, B. Huppert; H. Richter, M. Kneser, K. Stein, F. Bopp und E. Heinz.

Bis zum 1. November 1965 arbeitete ich als wissenschaftlicher Angestellter bei der Kommission für elektronisches Rechnen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München. Seitdem verwalte ich die Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum.

Bochum, 11.11.1968

Christoph Bandelow

